V. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Székelyudvarhely, 1996. márc. 29-ápr. 2.

11. osztály

1. feladat: Igazoljuk, hogy

$$(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{1996}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{1996}$$

pozitív egész szám, és adjuk meg a szám utolsó számjegyét.

Urbán János (Budapest)

1. feladat I. megoldása: Vezessük be az

$$a_n=(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2n}+(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2n}$$

jelölést! Ekkor $a_0=2$, $a_1=10$, és mivel $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^2=5+2\sqrt{6}$ és $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^2=5-2\sqrt{6}$, azért érvényes a következő számolás:

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= (49+20\sqrt{6})(5+2\sqrt{6})^n+(49-20\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})^n= \\ &= 10\left((5+2\sqrt{6})^{n+1}+(5-2\sqrt{6})^{n+1}\right)-\left((5+2\sqrt{6})^n+(5-2\sqrt{6})^n\right)=10a_{n+1}-a_n \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy az $a_{n+2}=10a_{n+1}-a_n$ rekurzió megadja a sorozat minden tagját, $a_0=2, a_1=10$ definícióval. Ez pedig azt jelenti, hogy a sorozat minden tagja egész szám. A feladat a_{998} értékét kéri, így ez is egész szám. Ennek alapján a sorozat tagjainak utolsó számjegye négyes periódus szerint 2, 0, 8, 0 lesz. Ez azt jelenti, hogy a_{998} utolsó jegye is 8 lesz.

---

2. feladat: Oldjuk meg a természetes számok halmazán az $x^y-x=y^x-y$ egyenletet.

Bencze Mihály, Oláh György (Brassó, Révkomárom)

2. feladat I. megoldása: Nyilvánvaló módon megoldás, ha a két változó megegyezik (ekkor a két oldal formálisan ugyanaz), illetve ha valamelyik változó 1 (ekkor mindkét oldal 0). Az általánosság megszorítás nélkül tegyük föl, hogy $0<x<y$, és jelöljük az $y-x$ különbséget t-vel. Az eredeti egyenlet új jelölésünkkel és átrendezve a következő alakú:

$$x^{x+t}+x+t=(x+t)^x+x$$

Mindkét oldalt x^x-szel elosztva ($x\neq 0$)

$$x^t+tx^{-x}=\left(1+\frac{t}{x}\right)^x<e^t,$$

mivel az $\left(1+\frac{k}{n}\right)^n$ sorozat monoton nőve tart e^k-hoz. Ebből viszont $x^t<e^t$, abból pedig $x<e$ következik, tehát $e<3$ miatt $x=1$ vagy $x=2$ képzelhető el csak. $x=1$-re már tudjuk, hogy minden y megoldást ad. $x=2$, $y=3$ megoldás, de ha $y>3$, akkor nem kaphatunk megoldást, hiszen $2^y>y^2-y+2$ miatt soha nem állhat fönt egyenlőség (az állítás y szerinti teljes indukcióval bizonyítható). Így megoldást akkor kapunk, ha az egyik változó 2, a másik pedig 3, ha valamelyik változó 1, illetve ha a két változó egyenlő. Ezzel a feladatot megoldottuk.

---

3. feladat: Legyen ABC háromszög AC oldalának A-hoz közelebbi harmadoló pontja D, BC oldalának felezési pontja E. Az $ABED$ négyszögről tudjuk, hogy húrnégyszög és egyben érintőnégyszög is. Jelölje R az ABC háromszög körülírt körének sugarát és r az $ABED$ négyszög beírt körének sugarát. Határozzuk meg az R/r hányados pontos értékét.

Bíró Bálint (Eger)

3. feladat I. megoldása: A feladat állítása szerint $ABED$ húrnégyszög. Ez azt jelenti, hogy az EDC és ABC háromszögek hasonlók lesznek, hiszen az EDC szög egyenlő lesz az ABE-vel, a DEC pedig a CAB-vel. Ez a szokásos jelöléseinkkel azt jelenti, hogy $a : b = \frac{2}{3}b : \frac{a}{2}$, ami átrendezve azt jelenti, hogy $b = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Ha bevezetjük a $DE = x$ jelölést, $x : \frac{a}{2} = c : b$, amit átrendezve $x = \frac{ac}{2b} = \frac{c}{\sqrt{3}}$. Mivel $ABED$ érintőnégyszög, azért szemközti oldalai megegyeznek, tehát $x + c = \frac{a}{2} + \frac{b}{3}$, és az előző összefüggéseket felhasználva ebből $c = \frac{a}{2}$ adódik.

A kapott egyenlőségekből átalakításokkal $a^2 - b^2 - c^2 = 0$ adódik, ez pedig azt jelenti, hogy az ABC háromszög derékszögű, körülírt körének sugara $R = \frac{a}{2}$. A beírt kör sugara $r = \frac{2T_{ABC}}{a+b+c} = \frac{a}{2(1+\sqrt{3})}$, ebből pedig $\frac{R}{r} = 1 + \sqrt{3}$

---

4. feladat: Igazoljuk, hogy ha az ABC hegyesszögű háromszögben $a = \beta$ és $b = \alpha$ akkor $c \leq \alpha \cdot \gamma$. ($a$, b, c a háromszög oldalainak hosszát α , β , γ a háromszög A, B illetve C csúcsához tartozó szögeinek mértéke radiánban.)

Bencze Mihály (Brassó)

4. feladat I. megoldása: Alkalmazzuk az ABC háromszögben a szinusztételt! Ekkor $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$, azaz $\frac{B}{\sin A} = \frac{A}{\sin B}$, vagyis $A \sin A = B \sin B$. Mivel a szinuszfüggvény 0 és $\frac{\pi}{2}$ között szigorúan monoton nő, azért $f(A) = f(B)$ miatt $A = B$, tehát az ABC háromszög egyenlőszárú. Ez azt jelenti, hogy

$$\cos C = \cos \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 1 - \frac{c^2}{2a^2} = 1 - \frac{c^2}{2A^2}$$

Mivel ismert becslés alapján $\cos x \geq 1 - \frac{x^2}{2}$, azért $\cos C \geq 1 - \frac{C^2}{2}$, ami azt jelenti, hogy $1 - \frac{c^2}{2A^2} \geq 1 - \frac{C^2}{2}$. Ezt átrendezve pedig $c \leq A \cdot C$- t kapjuk, ami éppen a bizonyítandó állítás volt.

---

5. feladat: Egy $6n \times 6n$ ($36n^2$ mezőt tartalmazó) négyzetes táblára két játékos felváltva, 2×2-es négyzeteket rak, amelyek nem fedik egymást. Az veszít, aki már nem tud tenni.
a) Legalább hány lépés után fejeződhet be a játék?
b) Van-e valamelyik játékosnak nyerő stratégiája?

András Szilárd, Bege Antal (Csíkszereda, Kolozsvár)

5. feladat I. megoldása: Egy 3x3-as négyzetes táblára csak akkor nem lehet újabb 2x2-eset elhelyezni, ha már legalább négy mezője foglalt. Ez azért van így, mert ha a középső négyzet foglalt, akkor bizonyosan még legalább 3 az (a 2x2-es táblák miatt). Ha csak saroknégyzetek foglaltak, akkor szükségképpen mind a négynek foglaltnak kell lennie, mert másképp lerakhatnánk még egy 2x2-es táblát. Ha a középső négyzet nem foglalt, de van valamelyik oldalon foglalt belső négyzet, akkor biztosan foglalt mellette még egy saroknégyzet, és ha nem lehet újabb 2x2-est lerakni, akkor foglalt még a két szemközti saroknégyzet is, vagy pedig foglalt még egy oldalsó négyzet, és így a mellette lévő saroknégyzet. Tehát minden esetben legalább 4 négyzet foglalt lesz.

Ha most a $6n$x$6n$-es táblánkat felbontjuk 4^n darab 3x3-asra, akkor a fenti gondolatmenettel belátható, hogy legalább $4^n \cdot 4$ darab mező le lesz fedve, mikor az egyik játékos már nem tud lépni. Eddig tehát mindenképp folyhat a játék, vagyis legalább 4^n lépés után lesz vége.

A b) kérdést illetően az első játékosnak van nyerő stratégiája, amennyiben az első lépésben a tábla közepén elhelyezkedő 4 db 3x3-as négyzet összeérő sarkaiból egyet-egyet lefed, majd a második játékos lépéseihez képest mindig a tábla középpontjára centrálszimmetrikusan lép (ez nyilvánvalóan megoldható). Ekkor látható, hogy a második játékos minden lépése után lesz még lehetősége lépni, tehát mivel a játék egyszer biztosan véget ér, azért a második játékos fog veszíteni, és az első nyerni.

---

6. feladat: Az $A_1A_2A_3A_4$ tetraéderben G_i-vel jelöljük az A_i-vel szemben fekvő lap súlypontját. Ha egy térbeli M pont esetén $3MG_i = MA_i$ bármely $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, igazoljuk, hogy M a tetraéder súlypontja.

András Szilárd, Tuzson Zoltán (Csíkszereda, Székelyudvarhely)

6. feladat I. megoldása: Ismert a térben a síkbeli Apollóniosz-tétel megfelelője, tehát a G_iA_i szakaszok fölé emelhető, 1:3 arányhoz tartozó Apollóniosz-gömbök közös pontja lesz M. A négy gömb középpontja nem lehet egy síkban, ez azt jelenti, hogy csak egy közös pontjuk lehet, a tetraéder súlypontjáról viszont tudjuk, hogy közös pontja a gömböknek, tehát M a súlypont lesz.