V. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Székelyudvarhely, 1996. márc. 29-ápr. 2.

10. osztály

1. feladat: Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n természetes szám esetén

$$1996 \,|\, 2557^{2n+1} + 1559^{2n+1} - 4054^{2n+1} - 62^{2n+1}$$

Veres Pál (Miskolc)

2. feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha $x \in \left[\frac{\pi}{4};\ \operatorname{arctg}\frac{\pi}{2}\right)$, akkor

$$\operatorname{tg}(\operatorname{ctg} x)\operatorname{ctg}(\operatorname{tg} x) \leq 1 \leq \operatorname{tg}(\operatorname{tg} x)\operatorname{ctg}(\operatorname{ctg} x)$$

Bencze Mihály (Brassó)

3. feladat: Minden $n \geq 1$ egész számra határozzuk meg azt a legnagyobb értéket, amelyet az a szorzat vehet fel, amely szorzat tényezői egészek és a tényezők összege n.

Urbán János (Budapest)

4. feladat: Helyezzünk el n pozitív számot egy kör kerületén úgy, hogy egy kivételével mindegyik a vele szomszédos két szám mértani és számtani középarányosa által meghatározott intervallumban található. Határozzuk meg a számokat, ha ismerünk egyet közülük!

Bege Antal (Kolozsvár)

5. feladat: Az ABC háromszögben az A szög belső szögfelezője a háromszög köré írható kört A_1-ben metszi. Hasonlóan kapjuk a B_1, C_1 pontokat. Igazoljuk, hogy:

$$1.)\quad \operatorname{Ter}[BA_1C] + \operatorname{Ter}[CB_1A] + \operatorname{Ter}[AC_1B] = p(R-r)$$

$$2.)\quad \frac{a^2}{-a+b+c} + \frac{b^2}{a-b+c} + \frac{c^2}{a+b-c} = \frac{2p}{r}(R-r)$$

Ahol a, b, c a háromszög oldalai, p a kerület fele, R a köré írható, r a beírható kör sugara.

Bencze Mihály, Szabó Magda (Brassó, Szabadka)

6. feladat: Legyen M egy olyan pont a térben, amelynek az $ABCD$ tetraéder AB, BC, CD és DA éleire eső M_1, M_2, M_3 és M_4 vetületei az illető szakaszok belső pontjai. Számítsuk ki az $a \cdot M_1A + b \cdot M_2B + c \cdot M_3C + d \cdot M_4D$ összeget (ahol a, b, c és d-vel az AB, BC, CD és DA élek hosszát jelöltük)!

András Szilárd (Csíkszereda)