V. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Székelyudvarhely, 1996. márc. 29-ápr. 2.

10. osztály

1. feladat: Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges n természetes szám esetén

$$1996 \,|\, 2557^{2n+1} + 1559^{2n+1} - 4054^{2n+1} - 62^{2n+1}$$

Veres Pál (Miskolc)

1. feladat I. megoldása: Tekintve, hogy $1996 = 4 \cdot 499$, a megoldáshoz elegendő, hogy az

$$A = 2557^{2n+1} + 1559^{2n+1} - 4054^{2n+1} - 62^{2n+1}$$

szám osztható külön-külön 4-gyel és 499-cel (a két szám relatív prím). Felhasználjuk a megoldás során, hogy az ismert azonosságok szerint

$$(a+b)|(a^{2n+1} + b^{2n+1})$$

és

$$(a-b)|(a^{2n+1} - b^{2n+1})$$

Mivel $2557 + 1559 = 4 \cdot 1029$, illetve $4054 + 62 = 4 \cdot 1029$, azért az

$$A = (2557^{2n+1} + 1559^{2n+1}) - (4054^{2n+1} + 62^{2n+1})$$

felírásban a kisebbítendő és a kivonandó is osztható 4-gyel, tehát $4|A$ is teljesülni fog. Mivel pedig $2557 - 62 = 5 \cdot 499$, továbbá $4054 - 1559 = 5 \cdot 499$, azért az

$$A = (2557^{2n+1} - 62^{2n+1}) - (4054^{2n+1} - 1559^{2n+1})$$

felírásban a kisebbítendő és a kivonandó is osztható 499-cel, tehát $499|A$ is teljesülni fog. A két állítás pedig együtt azt jelenti, hogy bebizonyítottuk a kért összefüggést.

---

2. feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha $x \in \left[\frac{\pi}{4};\ \mathrm{arctg}\,\frac{\pi}{2}\right)$, akkor

$$\mathrm{tg}\,(\mathrm{ctg}\,x)\,\mathrm{ctg}\,(\mathrm{tg}\,x) \le 1 \le \mathrm{tg}\,(\mathrm{tg}\,x)\,\mathrm{ctg}\,(\mathrm{ctg}\,x)$$

Bencze Mihály (Brassó)

2. feladat I. megoldása: Mivel a $\left[\frac{\pi}{4}, \mathrm{arctg}\,\frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon a tangensfüggvény szigorúan monoton növekszik, a kotangensfüggvény pedig szigorúan monoton csökken, azért $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \mathrm{arctg}\,\frac{\pi}{2}\right)$ esetén $\mathrm{arctg}\,\frac{\pi}{2} = \mathrm{arcctg}\,\frac{2}{\pi}$ felhasználásával $\mathrm{tg}\,x \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right)$, illetve $\mathrm{tg}\,(\mathrm{tg}\,x) \ge 1$, továbbá $\mathrm{ctg}\,x \in \left(\frac{2}{\pi}, 1\right]$, és így $\mathrm{ctg}\,1 \le \mathrm{ctg}\,(\mathrm{ctg}\,x)$. Ebből pedig $1 \le \mathrm{tg}\,(\mathrm{tg}\,x)\,\mathrm{ctg}\,(\mathrm{ctg}\,x)$.

Analóg módon kapható, hogy $\mathrm{ctg}\,(\mathrm{tg}\,x) \le \mathrm{ctg}\,1$, és hogy $\mathrm{tg}\,(\mathrm{ctg}\,x) \le \mathrm{tg}\,1$. Ez pedig együttesen azt jelenti, hogy $\mathrm{tg}\,(\mathrm{ctg}\,x) \cdot \mathrm{ctg}\,(\mathrm{tg}\,x) \le 1$. Ezzel mindkét állítást bebizonyítottuk.

---

3. feladat: Minden $n \ge 1$ egész számra határozzuk meg azt a legnagyobb értéket, amelyet az a szorzat vehet fel, amely szorzat tényezői egészek és a tényezők összege n.

Urbán János (Budapest)

3. feladat I. megoldása: Nyilvánvaló, hogy a maximum létezik, hiszen a lehetséges szorzatok halmaza felülről korlátos, n^n például egy triviális felső korlát. A maximális szorzatot adó felbontásban legyen

$$n = k_1 + k_2 + \ldots + k_l$$

Biztosan nem lesz egyik k_i sem 4-gyel egyenlő, hiszen a 4-esek pótolhatók az összegben és a szorzatban is 2 darab 2-essel. Bármely i-re $k_i \leq 4$ teljesülni fog, hiszen ha nem így lenne, k_i helyett $k_i - 2$-t és 2-t véve $2(k_i - 2) \geq k_i$ miatt a szorzat nagyobb lenne, mint az eredeti. $n = 1$ esetén a maximális szorzat nyilvánvaló módon 1, $n > 1$-re azonban 1-es már nem lehet a tényezők között, hiszen egy 1-es tényezőt elhagyva és bármelyik másik tényezőt 1-gyel növelve a szorzatot növelhetjük, míg az összeg nem változik. A maximális szorzatban így csak 2-esek és 3-asok szerepelhetnek, de 2-esből is legfeljebb 2 darab, mert 3 kettes már helyettesíthető két 3-assal, hisz $2 \cdot 2 \cdot 2 < 3 \cdot 3$. Így tehát $n = 1$-re a maximális szorzat 1 lesz, $n = 3l$-re 3^l, $n = 3l + 1$-re $4 \cdot 3^{l-1}$, $n = 3l + 2$-re pedig $2 \cdot 3^k$.

---

4. feladat: Helyezzünk el n pozitív számot egy kör kerületén úgy, hogy egy kivételével mindegyik a vele szomszédos két szám mértani és számtani középarányosa által meghatározott intervallumban található. Határozzuk meg a számokat, ha ismerünk egyet közülük!

Bege Antal (Kolozsvár)

4. feladat I. megoldása: Megmutatjuk, hogy szükségképpen az összes szám egyenlő lesz. Jelöljünk ki egy számot a kör kerületén, legyen ez c! A többi számot valamilyen körüljárás szerint számozzuk meg: $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$. Ha most $c > a_1$, akkor mivel a_1 a c és a_2 számok számtani és mértani közepe között van, azért közéjük esik, tehát $c > a_1 > a_2$. Ugyanígy teljes indukcióval belátható, hogy $c > a_1 > a_2 > \ldots > a_{n-1} > c$. Ez viszont ellentmondást okoz. Hasonló módon juthatunk ellentmondásra akkor is, ha egy bizonyos k-ig egyenlőség áll fönt, és csak utána van szigorú egyenlőtlenség. Fordított irányú egyenlőtlenségnél nyilvánvaló módon ugyanez a helyzet, ott $c < a_1 < a_2 < \ldots < a_{n-1} < c$ adódik (az első néhány helyen esetleg állhat egyenlőség), ami szintén ellentmondás. Beláttuk tehát, hogy mindenhol egyenlőségnek kell állnia, ez pedig azt jelenti, hogy szükségképpen minden szám egyenlő.

---

5. feladat: Az ABC háromszögben az A szög belső szögfelezője a háromszög köré írható kört A_1-ben metszi. Hasonlóan kapjuk a B_1, C_1 pontokat. Igazoljuk, hogy:

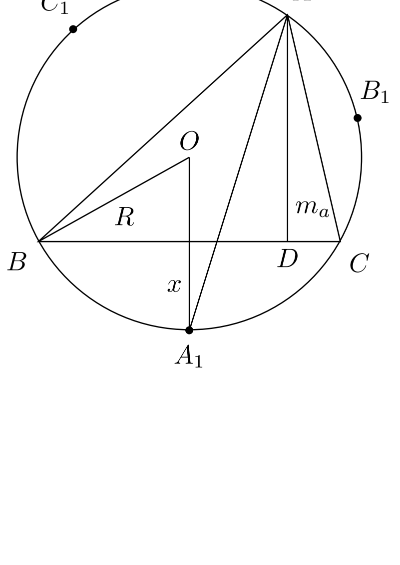
$$1.)\quad \mathrm{Ter}[BA_1C] + \mathrm{Ter}[CB_1A] + \mathrm{Ter}[AC_1B] = p(R - r)$$

$$2.)\quad \frac{a^2}{-a+b+c} + \frac{b^2}{a-b+c} + \frac{c^2}{a+b-c} = \frac{2p}{r}(R - r)$$

Ahol a, b, c a háromszög oldalai, p a kerület fele, R a köré írható, r a beírható kör sugara.

Bencze Mihály, Szabó Magda (Brassó, Szabadka)

5. feladat I. megoldása: Jelöljük O-val a körülírt kör középpontját. Tudjuk, hogy az A_1 pont felezi a BC ívet. Ebből következően az A_1O szakasz felezve metszi a BC szakaszt. Jelöljük x-szel a BA_1C háromszög A_1-hez tartozó magasságát.



A BA_1C háromszög területe $\frac{1}{2}ax$, x-et pedig kifejezve (használjuk fel, hogy BC és A_1O metszéspontja derékszögű háromszöget alkot B-vel és O-val, így alkalmazható a Pitagorasz-tétel) $x = R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}$, ebből az következik, hogy

$$T_{BA_1C} = \frac{1}{2} \cdot a \left(R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} \right)$$

Teljesen analóg módon kapható, hogy

$$T_{AC_1B} = \frac{1}{2} \cdot c \left(R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2} \right)$$

$$T_{CB_1A} = \frac{1}{2} \cdot b \left(R - \sqrt{R^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} \right)$$

Összeadva a területeket

$$T_{BA_1C} + T_{CB_1A} + T_{AC_1B} = \frac{1}{2}(a+b+c)R - T_{ABC} = p(R-r),$$

felhasználva a $T_{ABC} = pr$ jól ismert összefüggést. A BA_1C és ABC háromszögek területaránya a következő (D az AA_1 és BC szakaszok metszéspontja, m_a talppontját M-mel, A_1O és BC metszéspontját P-vel jelölve nyilvánvaló módon a DMA és PA_1D háromszögek hasonlók):

$$\begin{aligned} \frac{T_{BA_1C}}{T_{ABC}} &= \frac{\frac{1}{2}\,ax}{\frac{1}{2}\,am_a} = \frac{x}{m_a} = \frac{DA_1}{DA} = \frac{DA_1 \cdot DA}{DA^2} = \frac{DB \cdot DC}{DA^2} = \\ &= \frac{a^2bc}{(b+c)^2} \cdot \frac{(b+c)^2}{4bcp(p-a)} = \frac{a^2}{4p(p-a)}, \end{aligned}$$

a szögfelező hosszára vonatkozó összefüggést felhasználva, miszerint annak négyzete egyenlő a közrefogó oldalak szorzatának és a szemközti oldalon kialakuló darabok szorzatának a különbségével, és mivel

$$bc - a^2\frac{bc}{(b+c)^2} = bc\left(1 - \frac{a^2}{(b+c)^2}\right) = bc \cdot \frac{(a+b+c)(b+c-a)}{(b+c)^2}$$

Ha a másik két háromszögre is felírjuk ugyanezeket az egyenleteket és átszorzunk $2p$-vel, a kapott egyenletek megfelelő oldalait pedig összeadjuk, az adódik, hogy

$$\frac{a^2}{-a+b+c} + \frac{b^2}{a-b+c} + \frac{c^2}{a+b-c} = \frac{2p}{T_{ABC}} \cdot (T_{BA_1C} + T_{CB_1A} + T_{AC_1B}) = \frac{2p}{r}(R-r)$$

---

6. feladat: Legyen M egy olyan pont a térben, amelynek az $ABCD$ tetraéder AB, BC, CD és DA éleire eső M_1, M_2, M_3 és M_4 vetületei az illető szakaszok belső pontjai. Számítsuk ki az $a \cdot M_1A + b \cdot M_2B + c \cdot M_3C + d \cdot M_4D$ összeget (ahol a, b, c és d-vel az AB, BC, CD és DA élek hosszát jelöltük)!

András Szilárd (Csíkszereda)

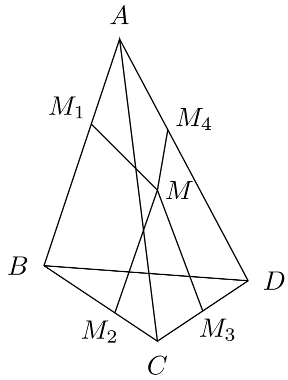
6. feladat I. megoldása: A Pitagorasz-tétel miatt

$$MA^2 - MB^2 = M_1M^2 + M_1A^2 - M_1M^2 - M_1B^2$$

$$MB^2 - MC^2 = M_2M^2 + M_2B^2 - M_2M^2 - M_2C^2$$

$$MC^2 - MD^2 = M_3M^2 + M_3C^2 - M_3M^2 - M_3D^2$$

$$MD^2 - MA^2 = M_4M^2 + M_4D^2 - M_4M^2 - M_4A^2$$



A megfelelő oldalakat összeadva, továbbá $M_1A + M_1B$, $M_2B + M_2C$, $M_3C + M_3D$, $M_4D - M_4A$ helyébe a, b, c és d beírásával

$$0 = M_1A^2 - M_1B^2 + M_2B^2 - M_2C^2 + M_3C^2 - M_3D^2 + M_4D^2 - M_4A^2 =$$

$$a(M_1A - M_1B) + b(M_2B - M_2C) + c(M_3C - M_3D) + d(M_4D - M_4A) =$$
$$-(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 2(aM_1A + bM_2B + cM_3C + dM_4D)$$

Amiből pedig átrendezés után

$$aM_1A + bM_2B + cM_3C + dM_4D = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}{2}$$

Ezzel kiszámoltuk a kifejezés pontos értékét, tehát a feladatot megoldottuk.