V. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Székelyudvarhely, 1996. márc. 29-ápr. 2.

9. osztály

1. feladat: a) Igazoljuk, hogy ha n egész szám, akkor $\frac{(7n-1)}{4}$ és $\frac{(5n+3)}{12}$ nem lehetnek egyszerre egész számok.

b) Hány olyan 1996-nál kisebb n természetes szám van, amelyre $\frac{(4n+3)}{(13n+2)}$ tört egyszerűsíthető?

Weszely Tibor, Czapáry Endre (Marosvásárhely, Pápa)

1. feladat I. megoldása: a) Indirekt módon bizonyítunk: tegyük fel, hogy létezik olyan n, amelyre mindkét kifejezés egész értékű. Ekkor jelöljük az első kifejezés értékét k-val, a másodikét l-lel! Ekkor átrendezve n értékére azt kapjuk, hogy

$$n = \frac{4k+1}{7} = \frac{12l-3}{5}$$

A második egyenlőséget alapul véve azonban rendezzünk át!

$$\begin{aligned} 20k+5 &= 84l-21 \\ 84l-20k &= 26 \\ 42l-10k &= 13, \end{aligned}$$

ami nyilvánvaló ellentmondás, hiszen míg a bal oldal páros, addig a jobb oldal páratlan. Ebből az következik, hogy a két kifejezés nem lehet egyszerre egész szám.

b) Jelöljük d-vel a számláló és a nevező legnagyobb közös osztóját! Ekkor $d|4n+3$, valamint $d|13n+2$ is teljesülnek. Ebből az következik, hogy $d|52n+39$, valamint $d|52n+8$. Ebből a kettőből következik, hogy d osztója a különbségüknek, azaz 31-nek. Ez viszont $d>1$ miatt csak $d=31$-et engedi meg. Legyen a számláló, $4n+3$, $31k$ alakú! Ekkor a $4n+3=31k$ egyenletet átrendezve $n=7k+\frac{3(k-1)}{4}$. Mivel a jobb oldalon egész szám áll, és $(3,4)=1$, azért $4|k-1$, tehát $k=4l+1$ valamely l egész számra. Minden ilyen szám megfelelő lesz továbbá, mivel az egyenlet ekvivalens átalakításaival kapjuk, hogy $4n+3=31k$, és ebből $31|52n+39$, valamint ebből következően $31|52n+8$, és mivel $(31,4)=1$, azért az utolsó oszthatóságból $31|13n+2$ is következik. Így tehát minden $4l+1$ alakú k-ra a tört egyszerűsíthető.

Az n értékére kapott fenti képletbe k helyére ezt beírva $n=31l+7$, ez kisebb kell hogy legyen, mint 1996, ami egyszerű számolással $0 \le l \le 64$-et jelent, és mint láttuk, minden értékre megoldást kapunk, tehát összesen 65 megfelelő természetes szám lesz.

---

2. feladat: A valós számok halmazán oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} x^2-4y+3 &= 0 \\ y^2-4z+3 &= 0 \\ z^2-4x+3 &= 0 \end{aligned}$$

Árokszállási Tibor (Paks)

2. feladat I. megoldása: A változókat ciklikusan cserélve az egyenletek nem változnak, így feltehetjük, hogy x a legkisebb változó. A harmadik egyenletet átrendezve $4x=z^2+3$, ami azt jelenti, hogy $x>0$, tehát minden változónk pozitív lesz. Az első egyenletet átrendezve $4y=x^2+3 \ge 4x$, vagyis $x^2-4x+3 \ge 0$, $z \ge x$ miatt azonban $z^2-4x+3 \ge x^2-4x+3$, vagyis $z^2-4x+3=0$ miatt $x^2-4x+3 \le 0$. A két kapott egyenlőtlenség egyszerre csak akkor állhat fenn, ha $x^2-4x+3=0$, tehát $x = 1$ vagy $x = 3$. Szükséges továbbá, hogy mindenütt egyenlőség álljon fent a becslésekben, tehát hogy $x = y = z$ legyen, tehát két megoldásunk lesz, $x = y = z = 1$ és $x = y = z = 3$. Ezekre könnyen ellenőrizhető módon valóban teljesülnek az egyenletek.

---

3. feladat: Melyek azok az $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket, melyekre $f(x) + f(g(y)) = x + y$, bármely $x, y \in \mathbb{R}$ esetén?

Kacsó Ferenc (Kolozsvár)

3. feladat I. megoldása: Jelöljük $g(0)$ értékét b-vel, és $f(b)$ értékét a-val! Ekkor $y = 0$ behelyettesítésével a feltételi egyenletet átrendezve azt kapjuk: $f(x) = x - a$ tetszőleges valós x-re. Ez azt jelenti, hogy ismét csak a feltételi egyenletbe visszaírva $f(g(y)) = g(y) - a$ következik. Felírható tehát a következő:

$$f(g(y)) = g(y) - a = x + y - f(x) = x + y - (x - a)$$

Ez pedig a feltételi egyenlettel egybevetve $g(y) = y + 2a$-t jelenti, és a-t valós paraméterként tekintve az $f(x) = x - a$ és $g(x) = x + 2a$ függvények valóban kielégítik a feltételi egyenletet, a gondolatmenetből következően pedig más megoldás nem lehetséges.

---

4. feladat: Adott egy szabályos 16 oldalú sokszög. Bármely két csúcsát összekötjük egy piros, kék vagy zöld szakasszal. Bizonyítsuk be, hogy létezik olyan háromszög, amelynek azonos színű oldalai vannak.

Bege Antal (Kolozsvár)

4. feladat I. megoldása: Jelöljük ki a sokszög egyik csúcsát, A-t! Ebből összesen 16 szakasz indul ki, a skatulyaelv alapján van köztük 6 egyforma színű, legyen a szín a piros, a szakaszok másik csúcspontjai pedig B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 és B_6. Ezek a feltevések nem befolyásolják a megoldás általánosságát. Ekkor a B-vel jelölt pontok közül semelyik kettőt sem kötheti össze piros szakasz, hiszen akkor az összekötött két csúcs és A egy piros színnel színezett háromszöget adna. Ez azt jelenti, hogy a 6 csúcs között csak kék és zöld élek futhatnak. Vizsgáljuk mostantól csak a hat pont alkotta halmazt, ahol minden összekötő szakaszt kék vagy zöld színűre színeztünk. Megmutatjuk, hogy lesz benne olyan háromszög, amelynek oldalai azonos színnel vannak színezve.

B_1-ből összesen 5 él indul ki a többi csúcsba, van köztünk 3 egyforma színű, feltehetjük, hogy zöld. Ezen csúcsok végpontjai közül semelyik kettő nem lehet zöld szakasszal összekötve, hiszen ekkor B_1-gyel együtt egy csupa zöld háromszöget alkotnának. E között a három él között tehát csak kék élek futhatnak, ami viszont azt jelenti, hogy hárman együtt egy olyan háromszöget alkotnak, amelynek minden oldalát kékre színeztük. Ezzel pedig beláttuk, hogy minden esetben lesz legalább egy olyan háromszög, amelynek minden oldala egyforma színű.

---

5. feladat: Az ABC háromszögben a B és C szögek belső szögfelezőinek talppontját B', C' -vel, a külső szögfelezők metszéspontját I_a-val, míg a háromszög köré írható kör középpontját O-val jelöljük. Igazoljuk, hogy I_aO merőleges $B'C'$-re.

András Szilárd (Csíkszereda)

5. feladat I. megoldása: Meg fogjuk mutatni, hogy az O és I_a pontok $B'C'$-re vett merőleges vetületei megegyeznek. Jelöljük ezeket Z_1-gyel, illetve Z_2-vel! A vetületek egybeesése azt jelenti, hogy

$$C'O^2 - B'O^2 = C'Z_1^2 - B'Z_1^2 = C'Z_2^2 - B'Z_2^2 = I_aC'^2 - I_aB'^2,$$

figyelembe véve a merőleges vetítésnél kialakuló derékszögű háromszögeket és a Pitagorasz-tételből kifejezve az átfogók négyzetét, majd ezeket kivonva egymásból. A középső egyenlőség pedig csak akkor állhat fenn, ha $Z_1 = Z_2$, hiszen a kifejezések valamelyik pontnak a szakasz végpontja felé történő mozgatásával monoton módon változnak.

Számoljuk ki az egyenlőségben szereplő értékeket a szokásos jelölésekkel!

$$C'O^2 - B'O^2 = (R^2 - B'O^2) - (R^2 - C'O^2) = AB' \cdot CB' - AC' \cdot BC'$$

felhasználva a B és C' pontok körre vonatkozó hatványát. A szögfelezőtétel állítása a következő:

$$\frac{AB}{CB'} = \frac{c}{a};\ 1 + \frac{AB'}{CB'} = 1 + \frac{c}{a};\ \frac{b}{CB'} = \frac{a+c}{a};\ CB' = \frac{ab}{a+c}$$

Hasonlóképp $AB' = \frac{bc}{a+c}$, $BC' = \frac{ac}{a+c}$, $AC' = \frac{bc}{a+b}$ is igazolhatók. Ekkor pedig a bizonyítandó egyenlőtlenségünk:

$$\frac{bc}{a+c} \cdot \frac{ab}{a+c} - \frac{bc}{a+b} \cdot \frac{ac}{a+b} = \left(s - \frac{bc}{a+b}\right)^2 - \left(s - \frac{bc}{a+c}\right)^2,$$

a szokásos $s = a + b + c$ jelölést alkalmazva. Ez pedig számolással egyszerűen igazolható azonosság.

---

6. feladat: Adott az ABC hegyesszögű háromszög, a belsejében egy M pont, valamint N és P, az M vetületei az AB és AC oldalakra és D a BC oldal felezőpontja. Igazoljuk, hogy $MN \cdot AC = MP \cdot AB \Leftrightarrow BAM\angle = DAC\angle$.

Bencze Mihály (Brassó)

6. feladat I. megoldása: Jelöljük az A pontnak a D pontra vonatkozó tükörképét E-vel.

Bizonyítsuk először a második állításból az elsőt! Tekintve, hogy $APM\angle + ANM\angle = 180°$, tudjuk, hogy $NPM\angle = NAM\angle = DAC\angle$, mert az $ANMP$ négyszög húrnégyszög, továbbá feltettük, hogy igaz a második állítás. Mivel pedig $NMP = 180° - NAP\angle = ACE\angle$ (ugyanis az $ABEC$ négyszög paralelogramma), azért az NMP és EAC háromszögek hasonlók egymáshoz, hiszen két szögük is megegyezik (az M-nél és C-nél lévő, valamint a P-nél és A-nál lévő). A megfelelő oldalak aránya $\frac{MN}{CE} = \frac{MP}{AC}$, így $MN \cdot AC = MP \cdot CE = MP \cdot AB$.

Az első állításból a második bizonyítása: az előző gondolatmenet mintájára $\frac{MN}{CE} = \frac{MP}{AC}$, továbbá $PMN\angle = ACE\angle$ továbbra is igaz marad, ez pedig azt jelenti, hogy az MPN és EAC háromszögek ismét hasonlók lesznek, amelyből az előző gondolatmenet lépéseit megfordítva $BAM\angle = DAC\angle$ már következik.