IV. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Paks, 1995. márc. 31-ápr. 4.

12. osztály

1. feladat: Az A csúcsú α hegyesszög szögtartományában vegyünk fel egy tetszés szerinti P pontot. Ennek merőleges vetülete a szögszárakon legyen B, illetve C. Bizonyítsuk be, hogy

$$BC/AP = \sin\alpha.$$

Csorba Ferenc (Győr)

2. feladat: Az $ABCD$ konvex négyszög átlói az O pontban metszik egymást. Mutassuk meg, hogy az

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2)$$

egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha vagy az átlók merőlegesek, vagy pedig O felezi valamelyik átlót.

Kiss Sándor (Nyíregyháza)

3. feladat: Adott az $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ pozitív számokból álló halmaz. Írjuk fel minden nem üres részhalmazában a számok összegét. Igazoljuk, hogy az így felírt számokat n csoportba tudjuk osztani úgy, hogy az egyes csoportokban a legnagyobb és legkisebb szám hányadosa nem nagyobb 2-nél!

Katz Sándor (Bonyhád)

4. feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha x és y olyan pozitív egészek, amelyekre $2x^2 + x = 3y^2 + y$ teljesül, akkor $x - y$, $2x + 2y + 1$ és $3x + 3y + 1$ is négyzetszámok.

Bogdán Zoltán (Cegléd)

5. feladat: Határozzuk meg az összes olyan f függvényt, amely az egész számok halmazán van értelmezve és értéke is egész, és minden x egészre eleget tesz a következő egyenletnek:

$$3f(f(x)) = 2f(x) + x$$

András Szilárd (Csíkszereda)

6. feladat: Fibonacci sorozatnak nevezzük az $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $(n \geq 3)$ kikötésekkel értelmezett sorozatot. Bizonyítsuk be, hogy ha $0 < p < n$, akkor az $F_{2p+1} + F_{2p+3} + \ldots + F_{2n+1}$ és $F_{2p} + F_{2p+2} + \ldots + F_{2n}$ számok nem lehetnek a Fibonacci sorozat tagjai.

Bencze Mihály (Brassó)