IV. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Paks, 1995. márc. 31-ápr. 4.

12. osztály

1. feladat: Az A csúcsú α hegyesszög szögtartományában vegyünk fel egy tetszés szerinti P pontot. Ennek merőleges vetülete a szögszárakon legyen B, illetve C. Bizonyítsuk be, hogy

$$BC/AP = \sin\alpha.$$

Csorba Ferenc (Győr)

1. feladat I. megoldása: Vegyük észre, hogy az $ABCP$ négyszög húrnégyszög, hiszen van két szemközti derékszöge. A körülírt kör átmérője AP lesz, mivel ez a szakasz mindkét másik csúcsból derékszög alatt látszik. Ez pedig azt jelenti, hogy az α kerületi szöggel rendelkező BC ívhez tartozó húr hossza $\sin\alpha \cdot AP$ lesz, ez pedig éppen a feladat által kívánt összefüggést adja.

---

2. feladat: Az $ABCD$ konvex négyszög átlói az O pontban metszik egymást. Mutassuk meg, hogy az

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2(AO^2 + BO^2 + CO^2 + DO^2)$$

egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha vagy az átlók merőlegesek, vagy pedig O felezi valamelyik átlót.

Kiss Sándor (Nyíregyháza)

2. feladat I. megoldása: Jelöljük az AOB szöget α-val! Ekkor a DOC szög is α lesz, továbbá az AOD és BOC szögek $180° - \alpha$ nagyságúak lesznek. A koszinusztételt felírva az ABO, BCO, CDO, DAO háromszögekre (az O-nál lévő csúcsra) és a megfelelő oldalakat összeadva

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2 = 2(AO^2+BO^2+CO^2+DO^2)-2(AO\cdot BO-BO\cdot CO+CO\cdot DO-DO\cdot AO)\cdot\cos\alpha$$

Ahhoz, hogy az egyenlőség a feladatban fennálljon, a kivonandónak a jobb oldalon 0-nak kell lennie, mivel azonban az

$$(AO - CO)(BO - DO)\cdot\cos\alpha$$

alakba írható, azért csak akkor lesz 0, ha $AO = CO$, vagy $BO = DO$ (tehát O felezi valamelyik átlót), illetve ha $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (konvex négyszögről van szó, tehát csak ez az egy érték lehetséges), amiből pedig az következik, hogy az átlók merőlegesek egymásra. Ez a két feltétel pedig együtt épp a feladatban leírtakat jelenti.

---

3. feladat: Adott az $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ pozitív számokból álló halmaz. Írjuk fel minden nem üres részhalmazában a számok összegét. Igazoljuk, hogy az így felírt számokat n csoportba tudjuk osztani úgy, hogy az egyes csoportokban a legnagyobb és legkisebb szám hányadosa nem nagyobb 2-nél!

Katz Sándor (Bonyhád)

3. feladat I. megoldása: Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_n$, hiszen egy halmaz elemeiről beszélünk, az pedig rendezetlen. Jelöljük b_i-vel az $\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_i)$ kifejezés értékét! Megfelelő csoportosítás lesz, ha azokat a számokat soroljuk egy csoportba, amelyek egy adott i-re b_i és $2b_i$ közé esnek. Ilyen módon nyilván legfeljebb n csoportot definiálunk; ha esetleg valamelyik üres lenne, további tetszőleges szétosztásával növelhető a csoportok száma (egy csoport bármely részhalmaza is nyilván megfelel a kívánalmaknak). Nem biztos továbbá, hogy minden szám csoportját egyértelműen meg tudjuk határozni, de ez nem is szükséges; a megfelelő csoportok közül bármelyikbe besorolhatjuk, csak annyi a fontos, hogy bármely csoport minden eleme b_k és $2b_k$ közé essen valamely k-ra.

Be kell látnunk még, hogy bármelyik számot besorolhatjuk legalább egy csoportba. Ezt indirekt módon bizonyíthatjuk: ha nem így lenne, találnánk egy olyan s összeget, valamint egy k számot, amelyekre $2b_k < s < b_{k+1}$ teljesülne. $2b_k < s$, tehát $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k < s$ miatt s tartalmaz legalább egy k-nál nagyobb indexű (így nagyobb) elemet, hiszen az összes k-nál kisebb indexű elemet felsoroltuk az összegben. Ez azt jelenti, hogy $s \geq a_{k+1}$. Ekkor viszont az $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_k < s$ egyenlőtlenségbe a jobb oldalhoz s-et, a bal oldalhoz a_{k+1}-et adva továbbra is teljesül az egyenlőtlenség, ez viszont azt jelenti, hogy

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_k + a_{k+1} < 2s,$$

tehát $b_{k+1} < s$, ami ellentmondás, hiszen a kezdeti feltevésünk épp ennek az ellenkezője volt. Ezzel tehát beláttuk, hogy minden számot besorolhatunk legalább egy csoportba, így a feladatot megoldottuk.

---

4. feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha x és y olyan pozitív egészek, amelyekre $2x^2 + x = 3y^2 + y$ teljesül, akkor $x - y$, $2x + 2y + 1$ és $3x + 3y + 1$ is négyzetszámok.

Bogdán Zoltán (Cegléd)

4. feladat I. megoldása: Alakítsuk át az egyenletet!

$$2x^2 + x - 2y^2 - y = y^2$$

A feladat állítását is figyelembe véve a bal oldal viszonylag könnyen szorzattá alakítható:

$$(x - y)(2x + 2y + 1) = y^2$$

Ha belátnánk, hogy $x - y$ és $2x + 2y + 1$ relatív prímek, az első két kifejezést illetően kész lennénk. Ez azonban igaz, ha ugyanis $(x-y)$-nak p egy prímosztója, akkor osztója y^2-nek is az egyenlet miatt, tehát osztója y-nak, ekkor azonban szükségképpen osztója x-nek is, ebből viszont már az következik, hogy osztja $2x+2y$-t, tehát relatív prím $2x + 2y + 1$-hez, vagyis nem osztja azt. Így az első két kifejezésre az állítás igaz.

A harmadik kifejezéshez használjuk egy másik átrendezését az eredeti egyenletnek!

$$\begin{aligned} 3x^2 + x - 3y^2 - y &= x^2 \\ (x - y)(3x + 3y + 1) &= x^2 \end{aligned}$$

Az előzőekből tudjuk, hogy $x - y$ négyzetszám, ekkor viszont $3x + 3y + 1$-nek is annak kell lennie. Ezzel a feladat megoldását befejeztük.

---

5. feladat: Határozzuk meg az összes olyan f függvényt, amely az egész számok halmazán van értelmezve és értéke is egész, és minden x egészre eleget tesz a következő egyenletnek:

$$3f(f(x)) = 2f(x) + x$$

András Szilárd (Csíkszereda)

5. feladat I. megoldása: Rendezzünk át!

$$3\left(f\left(f\left(x\right)\right) - f(x)\right) = -\left(f(x) - x\right)$$

Definiáljuk a $g(x) = f(x)-x$ függvényt, ez láthatóan f-hez nagyon hasonló tulajdonságokkal rendelkezik. Ezzel a függvénnyel az egyenlet alakja a következő:

$$3g\left(f(x)\right) = -g(x)$$

Ez azt jelenti, hogy minden egész x-re $g(x)$ osztható lesz 3-mal. Ekkor viszont $3g\left(f(x)\right)$ osztható 9-cel, ami azt jelenti, hogy $g(x)$ osztható 9-cel is, és így tovább, teljes indukcióval belátható, hogy bármely

n természetes számra és x egészre $3^n|g(x)$, ezt a feltételt azonban csak a $g(x) = 0$ függvény elégíti ki, ez pedig $g(x)$ definíciójával egybevetve azt jelenti, hogy bármely x-re $f(x) = x$. Ekkor pedig teljesül a feladatban szereplő egyenlet is.

---

6. feladat: Fibonacci sorozatnak nevezzük az $F_1 = 1$, $F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ $(n \geq 3)$ kikötésekkel értelmezett sorozatot. Bizonyítsuk be, hogy ha $0 < p < n$, akkor az $F_{2p+1} + F_{2p+3} + \ldots + F_{2n+1}$ és $F_{2p} + F_{2p+2} + \ldots + F_{2n}$ számok nem lehetnek a Fibonacci sorozat tagjai.

Bencze Mihály (Brassó)

6. feladat I. megoldása: Jelöljük az első számot A-val, a másodikat B-vel! A Fbonacci-sorozat definícióját felhasználva

$$A + B = F_{2p+2} + F_{2p+4} + \ldots + F_{2n+2}$$

$$A - B = F_{2p-1} + F_{2p+1} + \ldots + F_{2n-1}$$

Továbbá $A = (A + B) - B$ miatt $A = F_{2n+2} - F_{2p}$, és $B = A - (A - B)$ miatt $B = F_{2n+1} - F_{2p-1}$. A sorozat nyilvánvalóan növekvő és tagjai pozitívak, továbbá $F_{2n+2} = F_{2n+1} + F_{2n}$, így hát $A = F_{2n+2} - F_{2p} > F_{2n+2} - F_{2n} = F_{2n+1}$, de nyilván $A < F_{2n+2}$. Teljesen hasonló módon $F_{2n} < B < F_{2n+1}$, mivel azonban a sorozat monoton növekszik, ezért két szomszédos tagja között nem lehet újabb tag, tehát A és B valóban nem a Fibonacci-sorozat tagjai.