IV. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Paks, 1995. márc. 31-ápr. 4.

11. osztály

1. feladat: Az $AB = 1$ átmérőjű félkörbe olyan $ABCD$ trapézt szerkesztettünk, amely érintőnégyszög is. Mekkora a trapéz két szára?

Kiss Sándor (Nyíregyháza)

1. feladat I. megoldása: A trapéznak szükségképpen egyenlő szárúnak kell lennie, hiszen húrtrapéz. Jelöljük az AD szakasz hosszát x-szel, a D pont AB-re vett merőleges vetülete legyen az E pont. A befogótétel miatt $AD^2 = AE \cdot AB$. Ez azt jelenti, hogy $AE = x^2$, tehát $CD = 1 - 2x^2$. Mivel a trapéz egyenlő szárú, azért az alapok különbsége AE kétszerese lesz, tehát $2x^2$, ami azt jelenti, hogy $CD = 1 - 2x^2$ is teljesülni fog. Mivel azonban a trapézunk érintőnégyszög, azért a szemközti oldalak összege egyenlő, tehát

$$1 + (1 - 2x^2) = 2x$$

Ezt a másodfokú egyenletet x-re megoldva pozitív megoldásként azt kapjuk, hogy $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$, ekkora lesz tehát a trapéz szára.

---

2. feladat: Az e élhosszúságú $ABCDA'B'C'D'$ kocka egy lapja az $ABCD$ négyzet; az AA', BB', CC', DD' élek párhuzamosak. Mekkora az $ADCD'$ és a $BCDC'$ derékszögű tetraéderek közös részét képező test felszíne és térfogata?

Bogdán Zoltán (Cegléd)

2. feladat I. megoldása: Jelöljük az $ABCD$ és $CC'D'D$ lapok középpontjait P-vel, illetve Q-val! A közös rész a $DPCQ$ tetraéder lesz. A DCP és CQD háromszögek területe is ugyanakkora, $\frac{e^2}{4}$, a PCQ és DPQ lapok pedig egyaránt egy szabályos háromszög (ACD' és DBC') egynegyed részei területüket illetően, a szabályos háromszögek oldala pedig a kocka egy-egy lapátlója. A keresett felszín ennek megfelelően:

$$A = 2 \cdot \frac{e^2}{4} + 2 \cdot \frac{e^2\sqrt{3}}{8} = \frac{(2+\sqrt{3})e^2}{4}.$$

A keresett térfogat pedig a kiszámolt adatok alapján:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{e^2}{4} \cdot \frac{e}{2} = \frac{e^3}{24}.$$

---

3. feladat: Bizonyítsuk be, hogy

a) $\log_a \frac{2bc}{b+c} + \log_b \frac{2ca}{c+a} + \log_c \frac{2ab}{a+b} \geq 3,$ ha $0 < a, b, c < 1$

b) $\log_a \frac{b+c}{2} + \log_b \frac{c+a}{2} + \log_c \frac{a+b}{2} \geq 3,$ ha $a, b, c > 1$

Milyen esetben áll fenn az egyenlőség?

Weszely Tibor (Marosvásárhely)

3. feladat I. megoldása: A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenségben a számtani középpel leosztva és a mértanival szorozva azt kapjuk, hogy $\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab}$. Ez viszont $0 < a, b, c < 1$ esetén a logaritmusfüggvény szigorú monotonitása miatt

$$\log_a \frac{2bc}{b+c} + \log_b \frac{2ac}{a+c} + \log_c \frac{2ab}{a+b} \geq \log_a \sqrt{bc} + \log_b \sqrt{ca} + \log_c \sqrt{ab}$$

A jobb oldal viszont a következő formába írható a logaritmus azonosságainak segítségével

$$\frac{1}{2}\left(\log_a b + \frac{1}{\log_a b} + \log_b c + \frac{1}{\log_b c} + \log_c a + \frac{1}{\log_c a}\right)$$

alakra hozható, ami viszont az ismert egyenlőtlenség miatt, amely szerint egy pozitív számnak és reciprokának abszolútértéke legalább 2 (a kikötés miatt minden logaritmus értéke pozitív) legalább $\frac{1}{2} \cdot 6 = 3$.

Az $a, b, c > 1$ esetben a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség felhasználásával az előbbi módszerrel adódik, hogy

$$\log_a \frac{b+c}{2} + \log_b \frac{c+a}{2} + \log_c \frac{a+b}{2} \geq \log_a \sqrt{bc} + \log_b \sqrt{ac} + \log_c \sqrt{ab} \geq 3$$

Egyenlőség pedig mind a két esetben csak $a = b = c$-nél áll fenn a számtani és mértani közép felhasználása miatt, ekkor viszont könnyen ellenőrizhető, hogy valóban egyenlőség van.

---

4. feladat: Egy sakkbajnokságon mindenki mindenkivel játszott. Győzelemért 1, döntetlenért 0,5, vereségért 0 pont járt. A bajnokság végén kiderült, hogy minden résztvevő pontszámának felét az utolsó három helyezett elleni játszmákban szerezte. Hány résztvevője volt a versenynek?

Katz Sándor (Bonyhád)

4. feladat I. megoldása: Jelöljük a versenyzők számát n-nel!

Az utolsó három helyezett egymás elleni játszmáiban összesen 3 pontot osztottak ki, az első $n-3$ egymás elleni játszmáiban $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$ - t, végül az első $n-3$ helyezettnek az utolsó 3 ellen játszott mérkőzésein összesen $(n-3) \cdot 3 = 3n - 9$ pont került kiosztásra. A feladat állítása minden résztvevőre teljesül, így speciálisan az utolsó háromra is, tehát mindhárman a pontjaik felét szerezték egymás ellen, ami azt jelenti, hogy az első $n-3$ ellen ugyanannyi pontot szereztek összesen, mint egymás ellen, vagyis 3-at. Ez azt jelenti, hogy ellenük az első $n-3$ versenyző $3n-12$ pontot szerzett, tehát ugyanennyit szereztek egymás ellen is, ennek kell egyenlőnek lennie $\frac{(n-3)(n-4)}{2}$-vel. A másodfokú egyenletet megoldva $n = 4$ és $n = 9$ adódik eredményül. $n = 4$ esetén azt kapnánk, hogy az első 1 versenyzőnek (tehát a győztesnek) $3 \cdot 4 - 12 = 0$ pontja van, ami nyilvánvaló képtelenség. Ha $n = 9$, akkor ilyen akadály nem merül fel, csupán mutatni kell egy megfelelő elosztást, amelyben ezek a pontszámok realizálódnak. Ilyen például, ha az első 4 helyezett egymással csupa döntetlent játszik, az utolsó hármat pedig mind megverik; az utolsó 5 egymással mind döntetlent játszik; az 5. az 1.-től és a 2.-tól, a 6. a 3.-tól és a 4.-től kap ki, a többi meccsük döntetlen. Ekkor az első négy helyezett mindegyikének 6 pontja van, amelyből 3-at szereztek az utolsó három ellen; az 5.-nek és a 6.-nak 3 pontja, amelyből $1,5$-et szereztek az utolsó három ellen, a utolsó háromnak pedig 2 pontja, amelyből 1-et szereztek egymás ellen. Ezzel a feladatot megoldottuk.

---

5. feladat: Határozzuk meg azokat az x, y, z, t valós számokat, amelyek kielégítik a következő egyenletet:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = t + \sqrt{x + y + z - t}$$

Kovács Béla (Szatmárnémeti)

5. feladat I. megoldása: Rendezzünk át a bal oldalra, és alakítsunk teljes négyzetté alkalmas módon!

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 - t - \sqrt{x + y + z - t} = 0$$

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(z - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{x + y + z - t} - \frac{1}{2}\right)^2 = 0$$

Ez pedig csak akkor teljesül, ha $x = y = z = \frac{1}{2}$, valamint ezeket az értékeket felhasználva $t = \frac{5}{4}$.

---

6. feladat: Határozzuk meg azt a valós számok halmazán értelmezett valós értékű f függvényt, amely minden valós x-re kielégíti az

$$(f(x))^3 + (x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n})f(x) = 2x^3 + x^5 + x^7 + \ldots + x^{2n+1}$$

egyenletet ($n \geq 1$ rögzített egész).

Bencze Mihály (Brassó)

6. feladat I. megoldása: Alakítsuk át az egyenletet!

$$f^3(x) - x^3 + (x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n})f(x) = x(x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n})$$

Kiemelve $f(x) - x$-et, azt kapjuk, hogy

$$(f(x) - x)\left(f^2(x) + xf(x) + x^2 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n}\right) = 0$$

A második tényező mindig nagyobb lesz, mint 0, ha $x \neq 0$ (x-et paraméterként tekintve az $f(x)$-re kapott másodfokú egyenlet diszkriminánsa határozottan negatív), ebből az következik, hogy nem 0 x-ekre $f(x) = x$. $x = 0$-ban ez ekvivalens a második tényező 0 voltához szükséges $f(x) = 0$ feltétellel, tehát az $f(x) = x$ függvény kielégíti a megkívánt feltételt.