IV. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Paks, 1995. márc. 31-ápr. 4.

10. osztály

1. feladat: Egy $n \times n$-es táblázat minden mezőjére ráírjuk az 1, 2, 3 számok valamelyikét. Ki lehet-e tölteni a táblázatot úgy, hogy a sorokban, az oszlopokban és a két átlóban levő számok összege mind különböző legyen?

Kiss Sándor (Nyíregyháza)

1. feladat I. megoldása: A sorösszegek között a minimális az n (ami n darab 1-es összeadásával keletkezik), a legnagyobb pedig a $3n$, amit n darab 3-asból kapunk. E két érték között csak $2n+1$ lehetséges sorösszeg van, de az n darab sorra és oszlopra, valamint a két átlóba $2n+2$-re lenne szükségünk, ami azt jelenti, hogy a kért beírás nem megvalósítható.

---

2. feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha p és q 3-nál nagyobb prímszámok, akkor $p^2 + 7q^2 - 23$ nem prímszám.

Oláh György (Révkomárom)

2. feladat I. megoldása: Mivel a 3-nál nagyobb prímszámok mind 1-et vagy -1-et adnak maradékul 6-tal osztva (másként oszthatók lennének 2-vel vagy hárommal), azért a négyzetük 6-tal osztva mindig 1 maradékot ad. Így $p^2 + 7q^2$ 6-os maradéka 2 lesz, mivel két 1-es maradékú szám összegeként áll elő. Ebből egy 6-tal osztva 5-ös maradékú számot, a 23-at kivonva a különbség 6-tal osztva 3 maradékot ad, ami azt jelenti, hogy 3-mal osztható, továbbá biztosan nagyobb, mint 3 ($q \geq 5$ miatt $7q^2 \geq 175$), tehát összetett.

---

3. feladat: Az ABC háromszög C csúcsánál derékszög van. A B-ből induló szögfelező az AC befogót a P, a háromszög köré írt kört a Q pontban metszi. Mekkorák a háromszög szögei ha $BP = 2PQ$?

Benedek Ilona (Vác)

3. feladat I. megoldása: Mivel Q rajta van az AB fölé emelt Thalész-körön, azért az AQB szög is derékszög. Ez azt jelenti, hogy ha A-t tükrözzük a BQ egyenesre, az Q középpontú centrális tükrözést jelent, továbbá a tükörkép (A') rajta lesz a BC egyenesen, hiszen egy szög egyik szárának egy pontját a szögfelezőre tükrözve a tükörkép a másik száron lesz. Ez azt jelenti, hogy az ABA' háromszög AA' oldalának felezőpontja a Q pont lesz, tehát BQ a háromszög súlyvonala, tehát P a súlypont. Továbbá mivel a súlyvonal merőleges az AA' oldalra, azért a háromszög egyenlőszárú, $AB = A'B$. Másrészről ha P a súlypont, akkor a rajta áthaladó AC szakasznak is súlyvonalnak kell lennie, ez pedig azt jelenti, hogy C az $A'B$ oldal felezőpontja, mivel pedig C-nél derékszög van, ezért az AA' és AB oldalak is egyenlők, tehát az ABA' háromszög szabályos, ami azt jelenti, hogy az ABC szög 60°-os, továbbá AC egyben az $A'AB$ szög felezője is, tehát $BAC\angle = 30°$, a háromszög harmadik szöge pedig a C-nél lévő derékszög. A háromszög tehát egy 30°-os hegyesszöggel rendelkező derékszögű háromszög.

---

4. feladat: Bizonyítsuk be, hogy minden x valós számhoz létezik olyan y valós szám, hogy az (x, y) számpár megoldása az $x^5 + y^5 - x^4 - y^4 + x^4y + xy^4 - x - y + 1 = 0$ egyenletnek!

Kiss Sándor (Nyíregyháza)

4. feladat I. megoldása: Alakítsuk szorzattá a bal oldalt:

$$(x + y - 1)(x^4 + y^4 - 1) = 0$$

Ebből az alakból már nyilvánvaló, hogy minden x-hez létezik megfelelő y, éspedig $y = 1 - x$, ami minden x-re valós szám lesz.

---

5. feladat: Legyen M a hegyesszögű ABC háromszög AD magasságának egy belső pontja, és legyen A_1 a háromszög köré írt kör A végpontú átmérőjének másik végpontja. Az A-ból az A_1M egyenesre emelt merőleges a BC egyenest A_0-ban metszi; az M-ből AC-re, illetve AB-re állított merőlegesek talppontjait B_0, illetve C_0. Bizonyítsuk be, hogy A_0, B_0, C_0 egy egyenesen vannak.

András Szilárd (Csíkszereda)

5. feladat I. megoldása: Jelöljük k-val a háromszög köré írt kört! Ennek átmérője a feladat szerint AA_1. Ez azt jelenti, hogy a Thalész-tétel miatt az A-ból A_1M-re állított merőleges k-n van, hiszen derékszögben látszik belőle az AA_1 szakasz. Jelöljük ezt a pontot X-szel!

Az AM fölé emelt körön az eddigiek szerint rajta van X, továbbá a Thalész-tétel miatt B_0 és C_0 is. Az $MDCB_0$ négyszög húrnégyszög, mivel van két szemközti derékszöge. Ez azt jelenti, hogy az AMB_0 szög megegyezik a mellette fekvő szöggel, DMB_0-lal szemben fekvő szög, DCB_0 nagyságával. Továbbá $B_0MA\angle = B_0C_0A\angle$, hiszen azonos ívhez tartozó kerületi szögek. Ebből a két meglátásból $DCB_0\angle = B_0C_0A\angle$ már következik. Ez viszont azt jelenti, hogy a BCB_0C_0 négyszög húrnégyszög, hiszen a BC_0B_0 szög mellett fekvő szög a BCB_0 szöggel egyezik meg, tehát $BC_0B_0\angle + BCB_0\angle = 180°$. Jelöljük a négyszög körülírt körét k_2-vel!

A k és k_2 körök hatványvonala az AX egyenes, a k és k_1 köröké a BC egyenes. A_0 mindkettőn rajta van, tehát a k-ra, k_1-re és k_2-re vonatkozó hatványai megegyeznek, tehát rajta van a k_1 és k_2 körök hatványvonalán, amely a B_0C_0 egyenes, így tehát a három pont egy egyenesen van.

---

6. feladat: Határozzuk meg azt az f függvényt, amely
a) minden nemnegatív egészhez nemnegatív egész számot rendel hozzá, különböző egészekhez különböző egészeket;
b) minden nemnegatív egész n-re kielégíti az

$$f^2(0) + f^2(1) + \ldots + f^2(n) \leq \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

egyenlőtlenséget.

Bencze Mihály (Brassó)

6. feladat I. megoldása: Az egyenlőtlenség jobb oldalán a természetes számok 1-től n-ig vett négyzetösszege szerepel, ez adja a sejtést, hogy csak $f(n) = n$ lesz megfelelő. Bizonyítsuk ezt teljes indukcióval!

$n = 0$-ra az állítás $0 \leq f(0) \leq 0$ miatt, amiből $f(0) = 0$ következik, nyilván igaz. Tegyük fel, hogy igaz az állítás egy nemnegatív $n$egész számig. Ekkor a feladatban megadott egyenlőtlenség:

$$f^2(0) + f^2(1) + \ldots + f^2(n) + f^2(n+1) \leq \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

A bal oldal helyett az indukciós feltevés helyett beírhatjuk 1-től n-ig az egész számok négyzetösszegét:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + f^2(n+1) \leq \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Amely átrendezve

$$f^2(n+1) \leq \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = (n+1)^2$$

viszont $f(n+1)$ csak $n+1$ lehet, mivel a többi lehetséges értéket más helyen veszi föl a függvény ($1,\ 2, \ldots, n$-ben), ezzel tehát az indukciós lépést végrehajtottuk, és a megoldás teljes.