IV. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Paks, 1995. márc. 31-ápr. 4.

9. osztály

1. feladat: A mellékelt 3x3-as bűvös négyzetben minden sorban és oszlopban és mindkét átlóban ugyanannyi a számok összege. Határozzuk meg a hiányzó számokat!

199	995	
		1995

Kiss Sándor (Nyíregyháza)

1. feladat I. megoldása: Nevezzük el a mezőket a sakktábla számozásának megfelelően, a továbbiakban a mező nevét az értéke helyett is használjuk! A $c3$-as mezőben lévő szám beleszámít a c oszlop és a 3. sor összegébe is. Így a $c1 + c2$ összegnek meg kell egyeznie az $a3 + b3$ összeggel. Ez azt jelenti, hogy $1995 + c2 = 199 + 995 = 1194$, amiből $c2 = -801$ adódik. Az $a3 - c1$ átlóban ugyanannyi az összeg, mint a b oszlopban, tehát hasonló megfontolások miatt $b1 = 199 + 1995 - 995 = 1199$. $b1$ értékét felhasználva meghatározható $a2$ értéke is (az első oszlop és a harmadik sor összege egyenlő), amire $1199 + 1995 - 199 = 2995$-öt kapunk. Ha összeadjuk mind a kilenc számot, akkor az $a1 - c3$ átló összegének háromszorosát kapjuk, tehát

$$3(a1 + b2 + c3) = 199 + 995 + c3 + 2995 + b2 - 801 + a1 + 1199 + 1995$$

Ezt átrendezve $a1 + b2 + c3 = 3291$, ez lesz minden sor, oszlop és átló összege, amiből pedig már meghatározhatók a hiányzó értékek: $a1 = 97$, $b2 = 1097$, $c3 = 2097$.

---

2. feladat: Egy háromszög oldalai: a, b, c; egy másik háromszögé p, q, r. Bizonyítsuk be, hogy ezekre érvényes a következő egyenlőtlenség:

$$(a+1)^2 + (b-1)^2 + (c+1)^2 - 2(ap + bq + cr) > 6 - (p+1)^2 - (q-1)^2 - (r+1)^2.$$

Oláh György (Révkomárom)

2. feladat I. megoldása: Végezzük el a műveleteket és rendezzünk át a bal oldalra! A 6-os konstans eltűnik, és a megmaradt kifejezés a következő alakot ölti:

$$a^2 - 2ap + p^2 + b^2 - 2bq + q^2 + c^2 - 2cr + r^2 + 2(a + c - b) + 2(p + r - q) > 0$$

$$(a-p)^2 + (b-q)^2 + (c-r)^2 + 2(a + c - b) + 2(p + r - q) > 0$$

Ez pedig nyilván igaz lesz, hiszen a bal oldalon a háromszög-egyenlőtlenséget is figyelembe véve minden tag nemnegatív, kettő pedig határozottan pozitív.

---

3. feladat: Az $ABCD$ téglalap köré írt körének C-t nem tartalmazó AB ívén vegyük fel egy tetszőleges P pontot. P-ből az AC, illetve BD átlókra állított merőleges talppontja legyen L, illetve M. Bizonyítsuk be, hogy az LM szakasz hossza nem függ a P pont helyzetétől!

Szabó Magdolna (Szabadka)

3. feladat I. megoldása: Legyen az átlók metszéspontja O! Ekkor az $LPMO$ négyszög húrnégyszög, mivel van két szemközti derékszöge. Mivel O a téglalap körülírt körének középpontja, ezért az OP távolság mindig ugyanakkora lesz. Mindig ugyanakkora lesz továbbá az LPM szög, amely az AOB szög kiegészítő szöge. Így az LPM pontokra illeszkedő kör átmérője mindig ugyanakkora lesz (OP lesz az átmérő, mivel derékszögben látszik mind a két másik pontból), továbbá az LM ívhez tartozó kerületi szög is állandó lesz, ami azt jelenti, hogy az ív és a húr hossza is ugyanakkora lesz mindig, tehát az LM szakasz hossza független a P pont helyzetétől és épp ezt kívántuk belátni.

---

4. feladat: Egy 9×9-es táblázat mezőire ráírjuk tetszőleges sorrendben az $1, 2, \ldots, 81$ számokat. Bizonyítsuk be, hogy bármely elrendezés esetén található két olyan szomszédos mező, amelyeken levő számok különbsége legalább 6. (Két mező akkor szomszédos, ha van közös oldaluk).

Szabó Magdolna (Szabadka)

4. feladat I. megoldása: Indirekten bizonyítunk. Ha nem igaz az állítás, akkor egy sorban vagy oszlopban a legnagyobb különbség nem lehet nagyobb, mint $8 \cdot 5 = 40$. Ez azt jelenti, hogy az 1-es oszlopában és sorában is csak 41-nél nem nagyobb számok szerepelhetnek. A 81 oszlopában és sorában pedig ugyanígy csak 41-nél nem kisebb számok szerepelhetnek. Az 1-es oszlopának és sorának, valamint a 81-es oszlopának és sorának legalább két közös mezője van, amelyeken így csak 41-nél nem nagyobb, illetve nem kisebb számok szerepelhetnek. Két ilyen szám viszont nem létezhet, tehát ellentmondásra jutottunk, ami azt jelenti, hogy nem lehetséges olyan elrendezés, ahol a szomszédos mezők különbsége legfeljebb 5, ez viszont éppen a feladat állításával egyenértékű.

---

5. feladat: Bizonyítsuk be, hogy $1995^4 + 4^{1995}$ összetett szám!

Benedek Ilona (Vác)

5. feladat I. megoldása: Alakítsuk át a kifejezést!

$$1995^4 + 4^{1995} = (1995^2)^2 + (2^{1995})^2 = (1995^2 + 2^{1995})^2 - 2^{1996} \cdot 1995^2$$

Ez pedig ismert azonosság szerint $(1995^2 + 2^{1995} + 2^{998} \cdot 1995)(1995^2 + 2^{1995} - 2^{998} \cdot 1995)$ alakba írható, amely viszont láthatóan két 1-nél nagyobb szám szorzata, tehát összetett.

---

6. feladat: Állítsuk elő az összes olyan x, y racionális számot, amelyek kielégítik a következő egyenletet:

$$3x^2 - 5x + 9 = y^2.$$

Bencze Mihály (Brassó)

6. feladat I. megoldása: Láthatóan $x = 0$ esetén $y = \pm 3$. Ha $x \neq 0$, akkor keressük a megoldást $y = t + 3$ jelölés segítségével. A műveletek elvégzése és átrendezés után

$$3x^2 - 5x - t^2 - 6t = 0$$

A $\frac{t}{x}$ racionális szám egyszerűsített formáját jelöljük $\frac{m}{n}$-nel. Bármely megfelelő számhoz (ti. amelynek számlálója és nevezője relatív prím) megfelelők lesznek az $x = \frac{5n^2+6mn}{3n^2-m^2}$ és $t = \frac{m(5n+6m)}{3n^2-m^2}$, $y = t \pm 3$ racionális számok. Ez számolással könnyen ellenőrizhető, másrészről ebből a $\frac{t}{x}$ szám értéke $\frac{m}{n}$ lesz, tehát ezek lesznek a megoldások.