III. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Ungvár, 1994. ápr. 15-19.

12. osztály

1. feladat: Igazoljuk, hogy ha x_1 és x_2 az $x^2 - 1994x + 1$ másodfokú polinom gyökei, akkor minden $n > 0$ egész számra $x_1^n + x_2^n$ pozitív egész szám!

Szabó Magda (Szabadka)

2. feladat: Tekintsük azon $y = x^2+px+q$ egyenletű parabolák halmazát, amelyek a koordinátatengelyeket három különböző pontban metszik. Bizonyítsuk be, hogy e ponthármasokon áthaladó körvonalaknak van közös pontja.

Gecse Frigyes (Ungvár)

3. feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha $a, b, c > 1$, vagy $0 < a, b, c < 1$ valós számok, akkor

$$\frac{\log_b a^2}{a+b} + \frac{\log_c b^2}{b+c} + \frac{\log_a c^2}{a+c} \geq \frac{9}{a+b+c}.$$

Szabó Magda (Szabadka)

4. feladat: Számoljuk ki (zsebszámológép és függvénytáblázat használata nélkül) a következő szorzat értékét:

$$x = \sin 5^\circ \cdot \sin 15^\circ \cdot \sin 25^\circ \cdot \sin 35^\circ \cdot \sin 45^\circ \cdot \sin 55^\circ \cdot \sin 65^\circ \cdot \sin 75^\circ \cdot \sin 85^\circ.$$

Kántor Sándorné (Debrecen)

5. feladat: Határozzuk meg, hogy azok közül a tetraéderek közül, amelyeknek három, egy csúcsból induló éle páronként merőleges egymásra és összes élének hosszát összeadva egy h állandó értéket kapunk, melyiknek a térfogata maximális és mennyi ez a térfogat!

Kántor Sándorné (Debrecen)

6. feladat: Igazoljuk, hogy ha $n > 0$ egész szám, akkor

$$e^{1-\frac{1}{2n}} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < e^{1-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}},$$

ahol

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

a természetes logaritmus alapszáma!

Bencze Mihály (Brassó)