III. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Ungvár, 1994. ápr. 15-19.

11. osztály

1. feladat: Igazoljuk, hogy ha egy számtani sorozat elemei pozitív egész számok és van az elemek között négyzetszám, akkor végtelen sok négyzetszám is van a sorozat elemei között.

Szabó Magda (Szabadka)

1. feladat I. megoldása: Ha van a sorozatnak egy négyzetszám eleme (n^2), akkor $(n+d)^2$ is eleme lesz a sorozatnak, hiszen $(n+d)^2 = n^2 + (d+2)d$. Ez viszont azt jelenti, hogy van még egy négyzetszám eleme a sorozatnak, amelyhez hasonló módon található egy még nála is nagyobb, és így tovább, látható, hogy a sorozatban valóban végtelen sok négyzetszám lesz található.

---

2. feladat: Legyenek a, b, c olyan valós számok, amelyekre $a+b+c=1$ és $a, b, c \geq -0{,}25$. Igazoljuk, hogy

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq \sqrt{21}.$$

Neubauer Ferenc (Munkács)

2. feladat I. megoldása: Használjuk fel a számtani és négyzetes közepek közti egyenlőtlenséget!

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq 3 \cdot \sqrt{\frac{4a+1+4b+1+4c+1}{3}}$$

A jobb oldalon a gyökjel alatt pontosan $\frac{7}{3}$ fog állni, hiszen $a+b+c=1$, ha a 3-at bevisszük a gyökjel alá, azt kapjuk, hogy

$$\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} \leq 3 \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} = \sqrt{21}$$

és éppen ezt akartuk bizonyítani.

---

3. feladat: Mutassuk meg, hogy az

$$S = \left\{ x \in \mathbb{Q} \middle| x = \frac{3k+4}{5k+2}, k = 1, 2, \ldots 100 \right\}$$

halmaznak mind a 100 eleme különböző! Rendezzük őket nagyság szerint sorrendbe!

Szabó Magda (Szabadka)

3. feladat I. megoldása: Alakítsuk át a törtek alakját! $\frac{3k+4}{5k+2} = \frac{3}{5} + \frac{\frac{14}{5}}{5k+2}$. Ebből az alakból látszik, hogy k növelésével a törtek értéke szigorúan csökken, tehát valóban nem lehet köztük két egyenlő, a nagyság szerinti rendezés pedig megegyezik a k szerint fordított rendezéssel (növekvő rendezéshez k szerint csökkenő, csökkenőhöz k szerint növekvő rendezés szükséges).

---

4. feladat: Az ABC háromszög oldalaira az $AC^2 + BC^2 = 2AB^2$ összefüggés áll fenn. Határozzuk meg a háromszög síkjában azoknak a P pontoknak a halmazát, amelyekre $PA^2 + PB^2 = 2PC^2$ teljesül.

Bencze Mihály (Brassó)

4. feladat I. megoldása: Helyezzük el a háromszöget egy olyan koordinátarendszerben, amelynek x tengelye az AB egyenes, origója AB felezőpontja. Ekkor a csúcspontok koordinátái a következők lesznek:

$A(a;0)$, $B(-a;0)$, $C(c_1;c_2)$, ahol c_1 és c_2 egyelőre közelebbről meg nem határozott valós számok. A feladat feltétele a $P(x;y)$ pontra

$$(x-a)^2+y^2+(x+a)^2+y^2=2\left((x-c_1)^2+(y-c_2)^2\right)$$

A műveleteket elvégezve és átrendezve az egyenlőtlenséget azt kapjuk:

$$c_1x+c_2y=\frac{1}{2}(c_1^2+c_2^2-a^2)$$

Az ABC háromszögre a feladat a következőt állítja:

$$(c_1-a)^2+c_2^2+(c_1+a)^2+c_2^2=2(2a)^2$$

Átrendezve $c_1^2+c_2^2=3a^2$. Ezt az előbb kapott egyenletbe behelyettesítve $c_1x+c_2y=a^2$. Ez egy egyenes, melynek minden pontja megfelel a feladat feltételeinek (mások pedig a gondolatmenet szerint biztosan nem), így ez lesz a keresett mértani hely. Az egyenlet alaposabb vizsgálatával látható, hogy az egyenes átmegy a háromszög súlypontján (a súlypont koordinátáira érvényes az egyenlőség), továbbá, hogy merőleges a súlyvonalra, hisz meredeksége $-\frac{c_1}{c_2}$, míg az origóból kiinduló, a $C(c_1;c_2)$-n áthaladó súlyvonalé $\frac{c_2}{c_1}$. Ezzel pedig az egyenes geometriai értelemben is teljesen meg van határozva, a mértani helyet megkaptuk, a feladatot megoldottuk.

---

5. feladat: Igazoljuk, hogy 2^{1994}-nek van olyan többszöröse, amelynek tízes számrendszerbeli alakja csak az 1-es és 2-es számjegyeket tartalmazza!

Katz Sándor (Bonyhád)

5. feladat I. megoldása: Teljes indukcióval belátjuk, hogy 2^n-nek mindig van olyan n-jegyű többszöröse, amely csak 1-esekből és 2-esekből áll. $n=$ 1-re, 2-re, 3-ra igaz az állítás, a megfelelő többszörösök 2, 12 és 112 lehetnek például. Most pedig hajtsuk végre az indukciós lépést!

Ha $2^{n+1}|A_n$, akkor $A_{n+1}=2\cdot10^n+A_n$ megfelelő lesz, hiszen $2^{n+1}|2\cdot10^n$, és így $2^{n+1}|A_{n+1}$, továbbá nyilvánvaló, hogy A_{n+1} is csak az 1-es és 2-es számjegyeket tartalmazza, és $n+1$-jegyű, ami azt jelenti, hogy az indukciós lépés ebben az esetben végrehajtható.

Ha $2^{n+1}\nmid A_n$, akkor A_n maradéka 2^{n+1}-gyel osztva csak 2^n lehet, mivel A_n osztható 2^n-nel, tehát a maradéka is, ilyen maradék pedig a 0-n kívül csak a 2^n van. Ez azt jelenti, hogy 10^n+A_n. megfelelő lesz A_{n+1}-nek, hiszen $n+1$-jegyű, csak 1-es vagy 2-es számjegyei vannak, és mivel a jobb oldal mindkét tagjának 2^n a 2^{n+1}-es maradéka, azért összegük osztható 2^{n+1}-gyel.

---

6. feladat: A sík 6 különböző pontjában olyan fényszórók vannak elhelyezve, amelyeknek fénynyalábjai 60°-os szöget alkotnak. El lehet-e forgatni a fényszórókat úgy, hogy bevilágítsák az egész síkot?

Gecse Frigyes (Ungvár)

6. feladat I. megoldása: A hat fényszóró legfeljebb 15 egyenest határoz meg. Vegyünk egy olyan e_0 egyenest, amely egyikükkel sem párhuzamos, és valamennyi fényszóró az egyik partjára esik. Kezdjük el ezt az egyenest önmagával párhuzamosan eltolni, amíg 3-3 fényszóró nem lesz mindkét partján. Ez egyszer biztosan megtörténik, hiszen egyszerre mindig csak egy pont kerülhet át az egyik partról a másikra (ha kettő kerülne át egyszerre, akkor e_0 párhuzamos lett volna az általuk meghatározott egyenessel). Jelöljük a kapott egyenest e-vel! Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az e egyenes egyik partján a három fényszóró (A_1, A_2, A_3) e-re vett merőleges vetületei ebben a sorrendben követik egymást (könnyen kereshetünk olyan e egyenest is, hogy ezek a vetületek ne essenek egybe, csak az kell, hogy e_0 ne legyen merőleges a fényszórók által meghatározott egyenesekre). Ekkor húzzunk egy t_1 egyenest A_1-en, és egy t_2-t A_2-n keresztül úgy, hogy azok e-vel 60°-os szöget zárjanak be. Ha a két fényszórót úgy forgatjuk el, hogy hogy a fénynyaláb egyik szára az egyenesekre essen, a másik pedig párhuzamos legyen e-vel (a t_1 és t_2 által meghatározott szög, ϕ belseje felé mutasson), akkor az e másik partján lévő félsíkból csak a ϕ szögbe eső terület marad sötét. Ez viszont bevilágítható A_2-vel, ha úgy forgatjuk el, hogy a fénynyaláb szárai párhuzamosak legyenek t_1-gyel és t_2-vel. Ha A_2 nem esik a t_1 és t_2 által meghatározott azon szögtartományba, amelybe A_1 és A_2, akkor valamelyik egyeneshez képest ellenkező oldalon van, mint az a fénynyaláb, amelyet az egyenesen fekvő fényszóró kibocsát (ne engedjük meg, hogy ráessen az egyenesre, az e egyenest nyilván olyanra is választhatjuk, hogy ne zárjon be $60°$-os szöget semelyik két fényszóró egyenesével. Legyen ez a fényszóró az egyszerűség kedvéért A_3! Ekkor toljuk el a t_2-t önmagával párhuzamosan úgy, hogy átmenjen A_2-n! A kapott egyenes ugyanúgy $60°$-os szöget fog bezárni t_1-gyel, azonban A_3 már a két egyenes által meghatározott szögtartományba fog esni, tehát A_3-ból bevilágítható a két kapott egyenes által kijelölt szögtartomány.

Ez azt jelenti, hogy a három fényszóróval mindig bevilágítható az e egyenes másik partján fekvő félsík, a másik 3-mal pedig nyilván az e egyenes ezen partja, tehát a 6 fényszóróval be tudjuk világítani az egész síkot.