III. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Ungvár, 1994. ápr. 15-19.

10. osztály

1. feladat: Határozzuk meg azokat a tízes számrendszerben felírt pozitív egész számokat, amelyek egyenlők számjegyeik összegének négyzetével!

Árokszállási Tibor (Paks)

1. feladat I. megoldása: Nézzük meg, hogy vannak-e ilyen 1, 2, 3, illetve 4-jegyű számok.

Az egyjegyű számok között ez $a^2 = a$-t jelenti, ami $a = 1$ esetén teljesül. A kétjegyű számok között $10a + b = (a + b)^2$, átrendezve $9a = (a + b)(a + b - 1)$. A jobb oldal két tényezője relatív prím, ez azt jelenti, hogy az egyikük osztható 9-cel. Csak $a + b = 9$ lehetséges, mert a többi esetben ($a + b = 18$, $a + b = 10$, $a + b = 19$) a szorzat már nagyobb lenne 81-nél. Ha $a + b = 9$, akkor $a = 8$, ebből következik, hogy a szám 81 lesz, ez valóban jó is.

Háromjegyű számok között $100a + 10b + c = (a + b + c)^2$, azaz $9(11a + b) = (a + b + c)(a + b + c - 1)$ Ugyanígy a jobb oldal valamelyik tényezője osztható 9-cel, és némi számolás után adódik, hogy nem lesz megoldás.

A négyjegyű számok közt minden szám nagyobb, mint számjegyei összegének a négyzete, ugyanis az utóbbi maximuma $(4 \cdot 9)^2 = 1296$, tehát ha lenne ilyen szám, az 1-essel kezdődne, de ekkor a számjegyösszeg maximuma már csak 28, aminek a négyzete kisebb 1000-nél, tehát nem lehet a feladat feltételeinek megfelelő szám.

Ha a számjegyek száma nagyobb, mint négy, akkor már biztosan nem találhatunk megfelelő számot, hiszen $81n^2$, ami a számjegyösszeg maximuma, ekkor már kisebb lesz, mint 10^{n-1}, a lehető legkisebb n-jegyű szám. Ez az állítás teljes indukcióval belátható, $n = 5$-re igaz, továbbá n-ről $n + 1$-re átléphetünk, hiszen

$$\begin{aligned} 81(n+1)^2 &= 81n^2 + 162n + 81 < 81n^2 + 300n < \\ &< 10^{n-1} + 9 \cdot 10^{n-1} = 10^n \end{aligned}$$

Tehát 5-nél több jegyű számokra nem lehet megfelelő számot találni, ennél kisebbekre viszont csak kettő van: 1 és 81, tehát ez lesz az összes megoldás.

---

2. feladat: Legyenek a, b, c pozitív valós számok, amelyekre $abc = 1$. Határozzuk meg az $M = (1 + a)(1 + b)(1 + c)$ kifejezés minimumát!

Szabó Magda (Szabadka)

2. feladat I. megoldása: Használjuk fel, hogy $abc = 1$, és alakítsuk át a kifejezést:

$$M = \frac{(1+a)(1+b)(1+c)}{abc} = \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right)$$

Ebből következik, hogy

$$\begin{aligned} M^2 &= \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(1 + \frac{1}{b}\right)\left(1 + \frac{1}{c}\right)(1+a)(1+b)(1+c) = \\ &= \left(2 + a + \frac{1}{a}\right)\left(2 + b + \frac{1}{b}\right)\left(2 + c + \frac{1}{c}\right) \end{aligned}$$

Ebben az alakban viszont minden tényező legalább 4, hiszen közismert, hogy egy számnak és reciprokának összege mindig legalább 2. Így a kifejezés négyzete legalább 64-gyel lesz egyenlő, egyenlőség akkor áll fenn, ha $a = b = c = 1$. Ez azt jelenti, hogy M minimuma 8 lesz, és ezt az értéket föl is veszi.

---

3. feladat: Egy n lakosú városban klubokat szerveznek úgy, hogy bármely két klubnak legyen, és bármely három klubnak már ne legyen közös tagja. Legfeljebb hány klubot lehet így szervezni?

Róka Sándor (Nyíregyháza)

3. feladat I. megoldása: Egy lakos legfeljebb két klubhoz tartozhat, és bármely két klubnak van közös tagja, így a klubok számát k-val, a lakosokét n-nel jelölve, $\binom{k}{2} \le n$, ezt kifejtve és átrendezve $k^2 - k - 2n \le 0$. Az egyenlőtlenséget megoldva $k \le \frac{1+\sqrt{8n+1}}{2}$, és ennek a számnak az egészrészét el is tudja érni, feltéve, hogy minden lakos pontosan két klubhoz tartozik, ekkor éppen $\binom{k}{2}$ lakos lesz, ami azt jelenti, hogy az egyenlőtlenségekbe mindenhová egyenlőtlenséget írhatunk. Az így kapott n-ek közül vesszük azt, amely a lehető legközelebb van alulról a szükséges n-hez, és a maradék néhány embernek nem lesz klubja, de ez elkerülhetetlen, hiszen $k+1$ klubot már nem lehet megszervezni, ugyanis $\binom{k+1}{2}$ már nagyobb lesz, mint n.

Általánosságban az "ideális" kitöltésnél $n = \frac{k^2-k}{2}$, és ha valamely n-re van egy olyan k, hogy

$$\frac{k^2-k}{2} \le n < \frac{(k+1)^2-k-1}{2} = \frac{k^2+k}{2},$$

akkor egy n lakosú városban k klubot lehet szervezni, ez a másodfokú egyenlőtlenségben azt jelenti, hogy k a lehető legnagyobb olyan szám, amely azt még kielégíti, tehát a legnagyobb olyan szám, amely nem nagyobb $\frac{1+\sqrt{8n+1}}{2}$-nél, vagyis ennek a számnak az egészrésze.

---

4. feladat: Az ABC derékszögű háromszögben meghúztuk az AB átfogóhoz tartozó magasságot, ennek talppontja D. A C csúcsból induló szögfelező az átfogót E-ben metszi. A BDC szög felezője CB-t M-ben, az ADC szög felezője AC-t N-ben metszi. Bizonyítsuk be, hogy a $CNEM$ négyszög négyzet!

Benedek Ilona (Vác)

4. feladat I. megoldása: Az ECM és EDM szögek is egy derékszög feleként állnak elő, tehát mindkettő 45°-os. Ebből az következik, hogy a $CMED$ négyszög húrnégyszög, hiszen a C és D pontok is rajta vannak az ME szakasz fölé emelt 45°-os látóköríven. A $CNDM$ négyszög húrnégyszög, mivel van két egymással szemközti derékszöge. Ez viszont azt jelenti, hogy az N pont is rajta van a C, D, M pontok által meghatározott körön, amelyen már tudjuk, hogy rajta van E is. A CD szakasz a kör átmérője lesz, mivel derékszögben látszik pl. a D pontból. Ez viszont azt jelenti, hogy derékszögben látszik az N és M pontokból is, amiből arra következtethetünk, hogy a $CMEN$ négyszög téglalap. Így azonban már tudjuk, hogy nemcsak az MCE, hanem az MEC szög is 45°-os, tehát a CME háromszög egyenlőszárú, ez pedig azt jelenti, hogy $CM = CE$, így a $CMEN$ téglalap négyzet lesz, és ezt kellett belátnunk.

---

5. feladat: Igazoljuk, hogy ha n és k pozitív egész számok, akkor

$$(2n)! + (2k)! \ge 2(n+k)! \text{ és}$$

$$(2n+1)! + (2k+1)! \ge 2(n+k+1)!, \text{ ahol}$$

$$m! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m.$$

Bencze Mihály (Brassó)

5. feladat I. megoldása: Látható, hogy $n = k$ esetén az egyenlőtlenségek teljesülnek, hisz mindkét oldalon formálisan is ugyanaz a kifejezés áll. Elegendő tehát csak azzal az esettel foglalkoznunk, ha a két változó nem egyezik meg egymással. Ekkor az általánosság megszorítása nélkül föltehetjük, hogy $n < k$, hiszen mindkét egyenlőtlenség n-re és k-ra szimmetrikus. Jelöljük ekkor a $k - n$ pozitív egész számot p-vel!

Használjuk fel a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget!

$$\begin{aligned}(2n)!+(2k)! &= (2n)!+(2n+2p)! > 2\sqrt{(2n)!(2n+2p)!} = 2(2n)!\sqrt{(2n+1)\cdot\ldots\cdot(2n+2p)} = \\ &= 2(2n)!\sqrt{(2n+1)\cdot\ldots\cdot(2n+p)(2n+p+1)\cdot\ldots\cdot(2n+2p)} \geq \\ &\geq 2(2n)!\sqrt{(2n+1)^2\cdot\ldots\cdot(2n+p)^2} = 2(2n+p)! = 2(n+k)!\end{aligned}$$

Ezzel beláttuk az első egyenlőtlenséget. A második hasonló elven bizonyítható be:

$$\begin{aligned}(2n+1)!+(2k+1)! &= (2n+1)!+(2n+2p+1) > \\ &> 2\sqrt{(2n+1)!(2n+2p+1)!} = 2(2n+1)!\sqrt{2n+2\cdot\ldots\cdot(2n+2p+1)} = \\ &= 2(2n+1)!\sqrt{(2n+2)\cdot\ldots\cdot(2n+p+1)(2n+p+2)\cdot\ldots\cdot(2n+2p+1)}\end{aligned}$$

A gyökjel alatt az utolsó p darab tényező helyett vehetünk p-vel kisebbeket is, a kapott kifejezés nem lesz nagyobb, mint a fenti (egyenlőség $p=0$ esetén), tehát a kifejezés nem nagyobb, mint

$$2(2n+1)!\sqrt{(2n+2)^2\cdot\ldots\cdot(2n+p+1)^2} = 2(2n+p+1)! = 2(n+k+1)!$$

Ezzel beláttuk a második állítást is, egyenlőség pedig csak akkor lehet (és van is), ha $p=0$, tehát $n=k$.

---

6. feladat: Az $ABCDEF$ hatszög köré kör írható. Igazoljuk, hogy az AD, BE és CF átlók akkor és csak akkor metszik egymást egy O pontban (a kör belsejében), ha

$$AB\cdot CD\cdot EF = BC\cdot DE\cdot FA.$$

Kárteszi Ferenc (Budapest)

6. feladat I. megoldása: Amennyiben létezik az O pont, akkor az ABO és EDO háromszögek hasonlók, mert van két egyenlő szögük (az O-nál lévő csúcsszögek, illetve az E-nél és A-nál lévő szögek, hiszen mindkét csúcs ugyanarra a BD ívre esik). Ugyanilyen okok miatt hasonlók a CDO, AOF, BCO és EFO háromszögek is. A megfelelő oldalak arányát felírva:

$$\frac{AB}{ED}=\frac{AO}{EO},\ \frac{CD}{AF}=\frac{CO}{AO},\ \frac{EF}{CB}=\frac{EO}{CO}$$

Ha az egyenletek megfelelő oldalait összeszorozzuk, azt kapjuk, hogy

$$\frac{AB\cdot CD\cdot EF}{ED\cdot AF\cdot CB}=\frac{AO\cdot CO\cdot EO}{EO\cdot AO\cdot CO}=1,$$

ami a kívánt egyenlőtlenség.

Tegyük fel most, hogy a CO egyenes egy F' pontban metszi a kört. Megmutatjuk, hogy ez csak az F pont lehet. Mivel az F pontra a feladat szerint érvényes az egyenlőség, az F' pontra pedig az iménti fejtegetésünk szerint, ezért a szorzatokból az egyenlő tagokat elhagyva azt kapjuk: $FA\cdot EF' = EF\cdot F'A$, átosztva a megfelelő tényezőkkel (nyilván egyik sem 0) $\frac{FA}{EF}=\frac{F'A}{EF'}$. Mivel pedig az AFE és $AF'E$ ugyanazon íven fekvő látószögek, így megegyeznek, tehát az AEF és AEF' háromszögek hasonlók lesznek egymáshoz, mivel az AE oldaluk megegyezik, ezért egybevágók is, tehát F' legföljebb csak F-nek az AE felező merőlegesére vonatkozó tükörképe lehetne, akkor viszont az oldalak között kapott arányosság nem állna fenn (kivéve, ha a felező merőleges átmegy F-en, de akkor mindegy, hogy róla, vagy a tükörképéről beszélünk-e). Tehát F' nem lehet más, mint F, ami azt jelenti, hogy a feladat állítását beláttuk.