III. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Ungvár, 1994. ápr. 15-19.

9. osztály

1. feladat: Igazoljuk, hogy a $2p+1$ alakú számok között, ahol p prímszám, pontosan egy olyan van, amely egy pozitív egész szám köbe!

Szabó Magda (Szabadka)

1. feladat I. megoldása: Vizsgáljuk, meg milyen alakúak azok a számok, amelyek egyszerre állnak elő a feladatban megadott módon, és egy $2k+1$ alakú szám köbei (nyilván csak páratlan szám jöhet szóba).

$$2p+1=(2k+1)^3=8k^3+12k^2+6k+1$$

$$p=k(4k^2+6k+3)$$

Ez azt jelenti, hogy csakis $k=1$ jöhet szóba, hiszen p prímszám, és a második tényező mindig nagyobb, mint 1. Ebben az esetben a második tényező 13, ami valóban prímszám, és az imént láttuk, hogy más nem lehet, ezzel bebizonyítottuk az állítást.

---

2. feladat: Hány olyan — legalább kételemű — halmaz van, amelynek elemei egymást követő pozitív egész számok, és a halmaz elemeinek összege 100?

Kántor Sándorné (Debrecen)

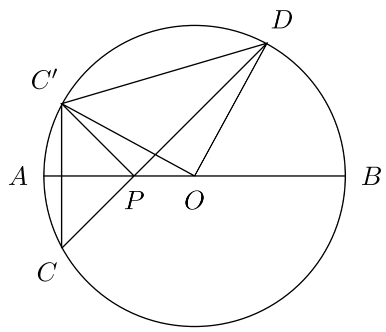
2. feladat I. megoldása: Legyen az első, a halmazban lévő számnál 1-gyel kisebb szám k, a halmaz legnagyobb eleme pedig n. Ekkor a halmaz elemeinek összege az ismert formula szerint $\frac{n(n+1)}{2}-\frac{k(k+1)}{2}=100$ lesz, azaz átalakítva $(n-k)(n+k+1)=200$. A két tényező közül az egyik páros, a másik páratlan, hiszen összegük is páratlan. Mivel $n-k$ a halmaz elemszáma, és legalább 2, $n+k+1$ pedig szintén legalább 2, ez csak kétféleképp fordulhat elő: az egyik tényező 5 vagy 25, a másik pedig megfelelően 40 vagy 8. Az első esetben az összegük, azaz $2n+1$ 45 lesz, tehát $n=22$, a különbségük pedig $2k+1=35$ (nyilvánvaló, hogy a második tényező a nagyobb), azaz $k=17$. A második esetben $n=16$, $k=8$. Több eset nem lehetséges, így tehát két halmaz lesz megfelelő: a 8-nál nagyobb és 17-nél kisebb egész számoké, valamint a 17-nél nagyobb és 23-nál kisebb egész számoké.

---

3. feladat: Egy kör AB átmérőjét messük el egy, az AB-vel 45°-os szöget bezáró CD húrral, AB és CD metszéspontját jelölje P! Igazoljuk, hogy $2(CP^2+PD^2)=AB^2$.

Benedek Ilona (Vác)

3. feladat I. megoldása: Jelöljük a kör középpontját O-val, a C AB-re vett tükörképét pedig C'-vel! A CPA szög 45° lesz, a CPC' szög derékszög a $C'CP$ szög pedig szintén ekkora lesz, hiszen egy egyenlőszárú derékszögű háromszög hegyesszöge lesz. A kerületi és középponti szögek tétele miatt ekkor $C'OD\angle=90°$, továbbá derékszög lesz $C'PD$ is, hiszen egy derékszög kiegészítő szöge. Mivel $CP=C'P$, azért $CP^2+PD^2=C'P^2+PD^2$, mivel a $C'PD$ háromszög derékszögű, azért $C'P^2+PD^2=C'D^2$, és mivel a $C'OD$ háromszög is derékszögű, azért $C'D^2=DO^2+C'O^2$, ami pedig egyenlő az átmérő fele négyzetének kétszeresével, tehát $\frac{AB^2}{2}$. Ez pedig éppen a kívánt állítás.



4. feladat: Határozzuk meg a $2x^2 - 8xy + 17y^2 - 16x - 4y + 2062$ kifejezés legkisebb értékét, ha x és y tetszőleges valós számok!

Róka Sándor (Nyíregyháza)

4. feladat I. megoldása: Alakítsuk át a kifejezést!

$$2x^2 - 8xy + 17y^2 - 16x - 4y + 2062 = 2(x - 2y - 4)^2 + 9(y - 2)^2 + 1994 \geq 1994$$

Egyenlőség pontosan akkor lesz, ha $y = 2$, és $x = 2y + 4 = 8$, tehát a minimum 1994 lesz, és ezt fel is veszi a kifejezés.

5. feladat: Egy 2 egység kerületű háromszög oldalainak hossza a, b és c. Igazoljuk, hogy

$$a)\ (1-a)(1-b)(1-c) > 0$$
$$b)\ a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2.$$

Szabó Magda (Szabadka)

5. feladat I. megoldása: A háromszög kerülete 2, tehát a háromszög-egyenlőtlenség szerint (kissé módosított formában, mely szerint bármely oldal kisebb a kerület felénél) mind a három oldal kisebb, mint 1. Ez azt jelenti, hogy az első egyenlőtlenség bal oldalán minden tényező pozitív, tehát az mindenképpen igaz. Másrészről viszont végezzük el abban a kifejezésben a műveleteket:

$$\begin{aligned}(1-a)(1-b)(1-c) &= 1 - a - b - c + ab + bc + ac - abc = \\ &= 1 - 2 + \frac{1}{2}\left((a+b+c)^2 - (a^2+b^2+c^2)\right) - abc > 0\end{aligned}$$

$a + b + c = 2$ behelyettesítésével pedig ebből már $a^2 + b^2 + c^2 + 2abc < 2$ már adódik.

6. feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha $x \in \mathbb{R}$ és $n > 0$, akkor

$$\left[\frac{(n+1)x}{2} - \frac{[x] + [2x] + \ldots + [nx]}{n}\right] = 0,$$

ahol $[A]$ jelöli az A szám egész részét, tehát azt a legnagyobb egész számot, amely nem nagyobb A-nál.

Bencze Mihály (Brassó)

6. feladat I. megoldása: Használjuk fel, hogy $x = \{x\} + [x]$.

$$\left[\frac{(n+1)x}{2} - \frac{[x]+[2x]+\ldots+[nx]}{n}\right] = \left[\frac{(n+1)x}{2} - x + 2x + \ldots + nx - \{x\} - \{2x\} - \ldots - \{nx\}\right] =$$
$$= \left[\frac{\{x\}+\{2x\}+\ldots+\{nx\}}{n}\right]$$

A számlálóban minden tag 1-nél kisebb abszolútértékű, vagyis összegük n-nél kisebb abszolútértékű, tehát a hányados egészrésze valóban 0 lesz, ezzel a kért állítást beláttuk.