II. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Vác, 1993. ápr. 4-7.

12. osztály

1. feladat: Mely n értékre igaz a következő állítás: Bármely n oldalú, önmagát nem metsző sokszögnek van olyan belső pontja, amelyből kerületének minden pontja látszik. (Ha A a sokszög kerületének egy pontja, P pedig a sokszög belső pontja, az A pont akkor látszik P-ből, ha az AP szakasz minden pontja, az A pont kivételével, a sokszög belsejében van.)

Bogdán Zoltán (Cegléd)

1. feladat I. megoldása: Konvex sokszögre az állítás nyilvánvalóan igaz, és általában is, pontosan akkor van megfelelő P belső pont, ha a sokszög felosztható (akár egymást átfedően) olyan konvex sokszögekre, amelyeknek van közös része, ebben helyezkedik el a pont, ahonnan így minden konvex sokszög kerületét, tehát az eredeti sokszög kerületét is látni. $n = 3$ esetén az állítás nyilvánvalóan igaz. $n = 4$-re, ha nem konvex a négyszög, akkor a konkáv szög szárait meghosszabbítva megfelelő felosztáshoz jutunk. $n = 5$ esetén hasonlóképp a (szükségképpen egyetlen) konkáv szög szárai megfelelő felosztást szolgáltatnak. $n = 6$ esetén azonban már viszonylag könnyen található olyan sokszög, amely nem felel meg a feltételeknek, egy ilyen látható az ábrán.

---

2. feladat: A K kocka élhossza 6 egység. Vágjuk szét a K kockát 216 egységkockára. Hány olyan kocka létezik K-ban, amelyet az egységkockák töltenek ki? (Két kockát különbözőnek tekintünk, ha K-n belül különböző helyet foglalnak el.)

Délvidék ()

2. feladat I. megoldása: Helyezzük el a kockát egy koordinátarendszerben, legyen az egyik csúcs az origó, az oldalélek a tengelyek, és adjunk az egységkockáknak a szokásos módon egész koordinátákat, így például az origónak kijelölt csúcs mellett fog elhelyezkedni a $(0, 0, 0)$ koordinátájú kocka, és az innen kiinduló testátló másik végpontjánál lesz a $(6, 6, 6)$ koordinátájú. Tekintsük minden kérdéses kockából azt az egységkockát, amely koordinátáinak összege minimális (ez lesz az origóhoz legközelebbi egységkocka)! Ennek a helyzete a mérettel együtt egyértelműen meghatározza az egységkockákból felépített kockát. Amiatt, hogy ez ne lógjon ki K-ból, az említett egységkockánk minden egyes méretre egy kockában mozoghat, amelynek oldaléle $6 - k + 1$, ha a k oldalélű kockákat szeretnénk összeszámolni. Ezen belül minden egyes pozícióhoz tartozik egy k oldalélű kocka, amelyekből így $(6 - k + 1)^3$ darab lesz, ezeket a számokat kell összegezni k-ra 1-től 6-ig, tehát a köbszámokat 1-től 6-ig, ami 441 lesz, tehát ennyi kockát kaphatunk K-n belül.

---

3. feladat: Határozzuk meg a $\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{1 - \sin\alpha\sin\beta}$ kifejezés maximumát és minimumát, ha α és β tetszőleges valós szögmérték.

Mészáros József (Galánta)

3. feladat I. megoldása: A szinuszfüggvény értékkészlete $[-1; 1]$, tehát $\sin\alpha + 1$ nem negatív, $\sin\beta - 1$ nem pozitív lesz. Ebből következően

$$(\sin\alpha - 1)(\sin\beta + 1) \le 0.$$

Ezt átrendezve kapjuk:

$$1 - \sin\beta \ge \sin\alpha - \sin\beta.$$

Mivel α és β szabadon választhatók, vizsgáljuk azt az esetet, mikor $1 - \sin\alpha\sin\beta$ nem 0, egyébként az eredeti tört sem értelmezett.

$$\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{1 - \sin\alpha\sin\beta} \ge 1$$

Hasonlóképpen $(\sin\alpha + 1) \geq 0$ és $(-\sin\beta + 1) \geq 0$, tehát

$$(\sin\alpha + 1)(-\sin\beta + 1) \geq 0,$$

ebből a fentihez hasonló módon

$$\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{1 - \sin\alpha\sin\beta} \geq -1$$

adódik, 1 és -1 lesz tehát a maximum és a minimum, hiszen $\beta = 0$, $\alpha = \frac{\pi}{2}$ választással a tört értéke 1, $\beta = \frac{\pi}{2}$, $\alpha = 0$ választással pedig -1, tehát mindkét értéket fölveszi.

---

4. feladat: Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$(x^2 + 3x - 4)^3 + (2x^2 - 5x + 3)^3 = (3x^2 - 2x - 1)^3.$$

Mészáros József (Galánta)

4. feladat I. megoldása: Vegyük észre, hogy a bal oldalon köbre emelt két kifejezés összege a jobb oldali hatványozás alapja, ezért ha a kifejezéseket rendre a, b, c betűkkel jelöljük, akkor az egyenlet

$$a^3 + b^3 = (a + b)^3$$

alakú, a köbösszegre vonatkozó ismert összefüggés felhasználásával azt jelenti, hogy $3(a^2b + ab^2) = 0$, tehát $ab(a+b) = 0$. Ez azt jelenti, hogy vagy $a = 0$, vagy $b = 0$, vagy pedig $a + b = c = 0$. Ez azt jelenti, hogy a megoldást az $x^2 + 3x - 4$, a $2x^2 - 5x + 3$ és a $3x - 2x - 1$ másodfokú polinomok gyökei fogják szolgáltatni, amelyek könnyen számolhatók: az 1 mindegyiknek gyöke, a további gyökök pedig -4, $-\frac{1}{3}$ és $\frac{1}{3}$.

---

5. feladat: Határozzuk meg azt a valós együtthatós $P(x)$ polinomot, amely eleget tesz a következő két feltételnek:

$$a)\ xP(x) = (x-3)P(x+1) \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad b)\ P(4) = -12.$$

Szabó Magda (Szabadka)

5. feladat I. megoldása: Nézzük meg először, mit mond a feltétel $x = 3$-ra! $3P(x) = 0 \cdot (-12)$. Ez azt jelenti, hogy $P(3) = 0$. Ugyanígy belátható, hogy $P(2) = P(1) = 0$ is igaz lesz. Így $P(x)$-nek 1, 2 és 3 gyökei, vagyis a gyöktényezők kiemelhetők:

$$P(x) = (x-1)(x-2)(x-3)Q(x)$$

Ha viszont ezt behelyettesítjük az a) jelű egyenletbe, átrendezve azt kapjuk, hogy

$$x(x-1)(x-2)(x-3)\,[Q(x) - Q(x+1)] = 0$$

bármely valós x-re. A $[Q(x) - Q(x+1)]$ kifejezés értéke tehát azonosan 0, ami azt jelenti, hogy a Q függvény konstans, jelöljük ezt a konstans értéket a-val! Ismerjük $P(4)$ értékét, behelyettesítve a kapott kifejezésbe:

$$P(4) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot a = -12$$

, amiből láthatóan $a = -2$ adódik, azt kaptuk tehát eredményül, hogy a $P(x)$ polinom alakja

$$-2(x-1)(x-2)(x-3)$$

---

6. feladat: Igazoljuk, hogy ha

$$a_i \in \mathbb{R}^+,\ i = 1, 2, \ldots, n(n \in \mathbb{N}^+) \quad \text{és} \quad k \in \mathbb{N}^+ \setminus \{1\},$$

akkor

$$\sqrt[k]{a_1 + a_2 + \ldots + a_n} + \sqrt[k]{a_2 + a_3 + \ldots + a_n} + \sqrt[k]{a_{n-1} + a_n} + \sqrt[k]{a_n} \geq \sqrt[k]{a_1 + 2^k a_2 + \ldots + n^k a_n}.$$

Bencze Mihály (Brassó)

6. feladat I. megoldása: Oldjuk meg a feladatot a felsőbb matematikában jól ismert Minkowski-egyenlőtlenséggel!

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt[k]{\sum_{j+1}^{m} (x_{i,j})^k} \geq \sqrt[k]{\sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} x_{i,j} \right)}$$

Válasszuk most $x_{i,j}$-t $\sqrt[k]{a_j}$-nek, ha $i \geq j$ és 0-nak, ha $i < j$. Ekkor éppen a kívánt egyenlőtlenséget kapjuk.