II. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Vác, 1993. ápr. 4-7.

11. osztály

1. feladat: Legyen p_n az n-edik prímszám, és $N = p_n + p_{n+1}$ $(n > 1)$. Bizonyítsuk be, hogy N legalább 3, nem feltétlenül különböző prímszám szorzata.

Róka Sándor (Nyíregyháza)

1. feladat I. megoldása: p_n és p_{n+1} 1-nél nagyobb prímek, tehát páratlanok, ezért N biztosan páros lesz. $\frac{N}{2}$ a két prím számtani közepe, tehát $p_n < \frac{N}{2} < p_{n+1}$. Ez azt jelenti, hogy $\frac{N}{2}$ összetett szám, így legalább két prím szorzata, tehát N legalább 3 prím szorzata.

---

2. feladat: A pozitív egész számok sorozatából töröljük az 1-et, továbbá a 2-vel és 3-mal osztható számokat. Így az $5, 7, 11, 13, 17, \ldots$ sorozatot kapjuk. Határozzuk meg a sorozat általános tagját.

Szabó Magda (Szabadka)

2. feladat I. megoldása: Ha elvégezzük az előírt műveletet, akkor a megmaradt számok 6-os maradéka csak 1 vagy -1 lehet. Természetesen $n = 1, 2$-re $k = 1$, $n = 3, 4$-re $k = 2$, és így tovább, általánosan $n = m, m+1$-re $k = \frac{m+1}{2}$, általánosan meghatározva is $k = \left[\frac{n+1}{2}\right]$. Így a számok általános képlete $6\left[\frac{n+1}{2}\right] + (-1)^n$.

---

3. feladat: Az egész számok halmazán oldjuk meg a következő egyenletet:

$$x^4 - x^3y - xy^3 + y^4 = 1.$$

Tar Miklós (Ungvár)

3. feladat I. megoldása: Alakítsuk át az egyenlet bal oldalát!

$$x^4 - x^3y - xy^3 + y^4 = x^3(x-y) - y^3(x-y) = (x-y)^2(x^2+xy+y^2)$$

x és y egész számok, ezért minden tényező is az, tehát ha a szorzat 1, akkor mindkét tényező abszolútértékének 1-nek kell lennie, és mivel az első tényező nemnegatív, azért $(x-y)^2 = x^2+xy+y^2 = 1$. A két kifejezést egymásból kivonva azt kapjuk, hogy $|3xy| = 0$, tehát $xy = 0$. Ha $x = 0$, akkor $y = \pm 1$, ha pedig $y = 0$, akkor $x = \pm 1$. Ezekben az esetekben pedig könnyen ellenőrizhető, hogy mindig megoldást kapunk.

---

4. feladat: A körbe írt $ABCD$ négyszög AC átlójának a felezőpontja a BD átlón van. Bizonyítsuk be, hogy

$$AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = 2BD^2.$$

Szabó Magda (Szabadka)

4. feladat I. megoldása: Jelöljük M-mel AC felezőpontját! A CDA és az ABC háromszög súlyvonalának kiszámítása az ismert képlettel történik:

$$4DM^2 = 2(AD^2 + DC^2) - AC^2$$

$$4DM^2 = 2(AB^2 + BC^2) - AC^2$$

Tudjuk még, hogy $BM \cdot MD = AM \cdot MC = \frac{AC^2}{4}$. Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 &= 2(DM^2 + BM^2) + AC^2 = \\ &= 2(DM^2 + BM^2) + 2 \cdot 2 \cdot \frac{AC^2}{4} = 2(DM + BM)^2 = 2BD^2, \end{aligned}$$

és éppen ezt akartuk bizonyítani, beláttuk a feladat állítását.

---

5. feladat: Határozzuk meg azt a legnagyobb p egész számot, amelyre igaz, hogy az 1, 2, …, 99, 100 számok bármely permutációjában van 10 egymást követő elem, amelyeknek összege legalább p.

Urbán János (Budapest)

5. feladat I. megoldása: Ha vesszük a következő permutációt:

$$100,\ 1,\ 99,\ 2,\ 98,\ 3, \ldots,\ 51,\ 50$$

Ebben a permutációban az első tíz elem összege 505 Emellett akárhogy veszünk tíz szomszédos számot, ha 50-nél kisebb az első, akkor az első kettő, a második kettő , és így tovább, az ötödik kettő összege is 100 lesz; ha 50-nél nagyobb az első, akkor ugyanezen párok összege mindig 101 lesz. Így tehát akárhogy választunk 10 szomszédos számot, azok összege mindig vagy 500 lesz, vagy pedig 505. Így a feladat által kért p szám legfeljebb 505 lesz, hiszen ha nagyobb lenne, akkor lenne olyan permutáció (éppenséggel ez), amelyben semelyik szomszédos szám-10-es összege nem lesz legalább akkora, mint p.

Másrészről ha bármely 10 szomszédos szám összege kisebb lesz 505-nél, akkor a_1-től kezdve tízesével csoportosítva az elemeket, minden csoportban 505-nél kisebb lesz az összeg, ezeknek az összege viszont kiadja az összes szám összegét. Tíz csoport lesz, ez azt jelentené, hogy a számok összege 5050-nél kisebb, azonban 1-től n-ig az egész számok összege $\frac{n(n+1)}{2}$, ebben az esetben 5050. Nem lehet tehát, hogy minden csoport összege kisebb legyen 5050-nél, tehát lesz legalább egy, amelyben az összeg legalább 505. Így az 505 megfelelő p lesz, és mivel nála nagyobb p nem lehet, azért $p = 505$ a feladat megoldása.

---

6. feladat: Igazoljuk, hogy bármely x, y, z pozitív számok esetén fennáll az

$$\frac{x+y+z}{3} - \sqrt[3]{xyz} \geq \frac{1}{6}\left((\sqrt{x}-\sqrt{y})^2 + (\sqrt{y}-\sqrt{z})^2 + (\sqrt{z}-\sqrt{x})^2\right)$$

egyenlőség. Általánosítsuk a feladatot.

Bencze Mihály (Brassó)

6. feladat I. megoldása: Végezzünk ekvivalens átalakításokat!

$$\begin{aligned} x+y+z-3\sqrt[3]{xyz} &\geq \frac{1}{2}\left(\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 + \left(\sqrt{y}-\sqrt{z}\right)^2 + \left(\sqrt{z}-\sqrt{x}\right)^2\right) \\ x+y+z-3\sqrt[3]{xyz} &\geq \frac{1}{2}\left(2x^2+2y^2+2z^2-2\sqrt{xy}-2\sqrt{yz}-2\sqrt{zx}\right) \\ \sqrt{xy}+\sqrt{yz}+\sqrt{zx} &\geq \sqrt[3]{xyz} \end{aligned}$$

Ez pedig láthatóan a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség $\sqrt{xy}$, $\sqrt{yz}$, $\sqrt{zx}$ változókra.

Teljesen analóg módon látható be az állítás n változóra is:

$$\frac{x_1+x_2+\ldots+x_n}{n} - \sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n} \geq \frac{1}{2n}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{x_i}-\sqrt{x_{i+1}}\right)\right)$$

Ahol az x_i-k pozitívak, és $x_{n+1} = x_1$.