II. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Vác, 1993. ápr. 4-7.

10. osztály

1. feladat: Az $ABCD$ négyzet CD oldalára, a négyzet külső tartományában, megszerkesztjük az M-ben derékszögű DCM háromszöget. Bizonyítsuk be, hogy a $DMC\angle$ szögfelezője a négyzetet két egybevágó részre osztja.

Mészáros József (Galánta)

1. feladat I. megoldása: Ha a négyzet egyik oldalára kört emelünk, az átmegy a négyzet középpontján. Ugyanezen a CD átmérőjű körön lesz az M csúcs is Thalész tétele miatt. A DO és OC húrok egyenlők, így egyenlők a hozzájuk tartozó ívek, tehát az azokhoz tartozó szögek is: CMO és OMD. Ez viszont azt jelenti, hogy az OM egyenes a CMD szög felezője, amely így átmegy a négyzet középpontján, tehát felezi annak területét.

---

2. feladat: Bizonyítsuk be, hogy a

$$93n^2 - 4n + 5$$

másodfokú polinom nem írható fel két racionális együtthatójú elsőfokú polinom négyzeteinek különbségeként.

Mészáros József (Galánta)

2. feladat I. megoldása: A bizonyítás indirekt: tegyük fel, hogy van két ilyen polinom, legyenek ezek $an + b$ és $cn + d$. Ekkor az eredeti polinomunk felírható négyzeteik különbségeként, azaz

$$93n^2 - 4n + 5 = (an + b)^2 - (cn + d)^2$$

Ezt az ismert azonosság szerint átalakítva kapjuk, hogy

$$93n^2 - 4n + 5 = [(a - c)n + b - d] \cdot [(a + c)n + b + d]$$

Ekkor, mivel a jobb oldali tényezők elsőfokúak, biztosan van gyökük, tehát a bal oldalnak is lenne, mivel azonban a diszkrimináns $4^2 - 4 \cdot 93 \cdot 5 = -1844$, ami kisebb, mint 0, így nem létezhet megoldás, vagyis a két oldal soha nem lehet azonos, tehát biztosan nincsenek a feladat feltételének megfelelő polinomok.

---

3. feladat: Oldjuk meg a pozitív prímszámok halmazán a következő egyenletet:

$$3x^2 + 6x = 2y^2 + 7y.$$

Oláh György (Révkomárom)

3. feladat I. megoldása: Az oszthatóság könnyebb vizsgálata érdekében célszerű átrendezni az egyenletet:

$$3x(x + 2) = y(2y + 7)$$

Mivel x és y prímszámok, ez azt jelenti, hogy $x|y$ (ekkor $x = y$), vagy $x|2y + 7$. Az első esetben nincs értelmes megoldás, az $x(x - 1) = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk. A második esetben az is igaz lesz, hogy $3x|2y + 7$, mert $3x$ osztja a bal oldalt, és relatív prím y-hoz ($y = 3$ könnyen láthatóan nem ad megoldást). Ekkor

$$3x \leq 2y + 7$$

Továbbá igaz az, hogy $y|(x + 2)$ (mivel $3x$-hez relatív prím). Így az iménti egyenlőtlenségbe behelyettesítve és tovább becsülve

$$3x \leq 2y + 7 \leq 2x + 11$$

-et kapjuk, tehát $x \leq 11$ a megoldás szükséges feltétele. Felhasználva az oszthatóságokat, és a nagyságviszonyokat, tekintsük át x lehetséges értékeit!

$x = 2$-re y az $x + 2 = 4$ osztója, de 2 nem lehet, tehát nincs megoldás. $x = 3$-ra y az $x + 2 = 5$ osztója, tehát csak 5 lehet, de a 9 nem osztja a $2 \cdot 5 + 7 = 17$-et. $x = 5$-re $y = 7$ az egyetlen lehetőség, de $3 \cdot 5 \nmid 2 \cdot 7 + 7$. $x = 7$-re $y = 3$, de $3 \cdot 7 \nmid 2 \cdot 3 + 7$. És végül $x = 11$-re $y = 13$, ez könnyen ellenőrizhetően megoldás, és a gondolatmenetünk szerint más megoldás nem is létezik.

---

4. feladat: Az ABC háromszög súlyvonalai s_a, s_b, illetve s_c. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög akkor és csak akkor derékszögű, ha $s_a^2 + s_b^2 = 5s_c^2$.

Neubauer Ferenc (Munkács)

4. feladat I. megoldása: Ismert tény, hogy a háromszög egy súlyvonala (pl. s_a) a következő formában írható fel az oldalakkal:

$$s_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}$$

Ezt behelyettesítve és a nevezővel felszorozva

$$\begin{aligned} 2b^2 + 2c^2 - a^2 + 2a^2 + 2c^2 - b^2 &= 5(2a^2 + 2b^2 - c^2) \\ 4c^2 + a^2 + b^2 &= 10a^2 + 10b^2 - 5c^2 \\ 9c^2 &= 9a^2 + 9b^2 \\ a^2 + b^2 &= c^2, \end{aligned}$$

ami a Pitagorasz-tétel megfordítás szerint azt jelenti, hogy a háromszögünk derékszögű.

---

5. feladat: Bizonyítsuk be, hogy $n > 1$ egész szám esetén

$$\sqrt[3]{n - \sqrt{n}} + \sqrt[3]{n + \sqrt{n}}$$

irracionális szám.

Tar Miklós (Ungvár)

5. feladat I. megoldása: Tegyük fel, hogy a szám racionális, $\frac{p}{q}$ alakú. Emeljünk harmadik hatványra és rendezzünk át!

$$n - \sqrt{n} + n + \sqrt{n} + 3\left(\sqrt[3]{(n^2 - n)\left(n - \sqrt{n}\right)} + \sqrt[3]{(n^2 - n)\left(n + \sqrt{n}\right)}\right) = \frac{p^3}{q^3}$$

$$3\sqrt[3]{n^2 - n}\left(\sqrt[3]{n - \sqrt{n}} + \sqrt[3]{n + \sqrt{n}}\right) = Q,$$

ahol Q racionális szám. Mivel feltevésünk szerint a bal oldal második tényezője is racionális, ezért az első is az, tehát $\sqrt[3]{n^2 - n}$ racionális. De mivel a köbe egész szám, ezért ha ő maga racionális, akkor már egész is, ekkor pedig a köbe, $n^2 - n$ egy köbszám. Ez azonban nem lehet, hiszen két szomszédos szám (n és $n - 1$) szorzata, ezek nem tartalmaznak közös prímtényezőt, így mindkettő köbszám, és ez $n > 1$ miatt nem lehetséges. Ellentmondásra jutottunk, tehát a kifejezés értéke nem lehet racionális szám.

---

6. feladat: Igazoljuk a következő azonosságot:

$$\left[\sqrt{n} + \sqrt{n + 2} + \sqrt{n + 4}\right] = \left[\sqrt{9n + 17}\right],$$

ahol $n \geq 2$ egész szám, és $[a]$ az a szám egészrészét jelöli.

Bencze Mihály (Brassó)

6. feladat I. megoldása: Használjuk fel a számtani, mértani és négyzetes közepek közti egyenlőtlenségeket 3 változóra! Legyen a három változónk $\sqrt{n}$, $\sqrt{n+2}$ és $\sqrt{n+4}$. Ekkor az egyenlőtlenség szerint (a műveleteket elvégezve)

$$3\sqrt[6]{n(n+2)(n+4)} < \sqrt{n} + \sqrt{n+2}\sqrt{n+4} < \sqrt{9n+18}.$$

Igaz továbbá az, hogy $\sqrt{9n+17} < 3\sqrt[6]{n(n+2)(n+4)}$. Ez 11-nél kisebb n-ekre számolással, e fölött teljes indukcióval látható be. Ez pedig azt jelenti, hogy $\sqrt{9n+17} < \sqrt{n} + \sqrt{n+2} + \sqrt{n+4}$. Ebből pedig az következik, hogy $[\sqrt{9n+17}] = \left[\sqrt{n} + \sqrt{n+2} + \sqrt{n+4}\right]$