II. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Vác, 1993. ápr. 4-7.

9. osztály

1. feladat: Egy háromjegyű szám számjegyei különbözők és nincs közöttük nulla. A számjegyek összege n. Bizonyítsuk be, hogy a három számjegyből az összes lehetséges módon képezhető háromjegyű számok számtani közepe osztható 37-tel és n-nel.

Szabó Magda (Szabadka)

1. feladat I. megoldása: Legyen a három számjegy a, b és c. Ezekből hatféle számot képezhetünk, a hatféle sorrendnek megfelelően. Az egyes helyiértékeken az eloszlás nyilván szimmetrikus lesz, minden számjegy kétszer szerepel mind a három lehetséges helyiértéken, így a valós értékük is kétszer-kétszer lesz a számjegy 100-szorosa, 10-szerese, illetve 1-szerese. Így a számok számtani közepe

$$\frac{222a + 222b + 222c}{6} = 37(a + b + c) = 37n$$

lesz, ez pedig azt jelenti, hogy a számtani közép osztható lesz 37-tel és n-nel is.

---

2. feladat: Az $ABCD$ paralelogramma AD és BC oldalán úgy vesszük fel a belső F illetve E pontot, hogy teljesüljön az $AF = EC$ egyenlőség. Legyen továbbá P az AB oldal tetszőleges belső pontja. Az EF és DP szakaszok metszéspontját G-vel, az EF és CP szakaszok metszéspontját pedig H-val jelöljük.

Bizonyítsuk be, hogy a PGH háromszög területe az FGD és CHE háromszögek területeinek összegével egyenlő.

Mészáros József (Galánta)

2. feladat I. megoldása: A megadott feltételek mellett az $ABEF$ és $FECD$ négyszögek egybevágók lesznek, területük megegyezik, tehát az $ABEF$ négyszög területe a paralelogramma területének fele lesz. A háromszögek területképletéből azonnal adódik, hogy az APD és PBC háromszögek együttes területe megegyezik a DPC háromszög területével, tehát ezek is a paralelogramma területének felét képviselik. Mivel pedig a kért egyenlőség egyik oldalát (az FGD és CHE háromszögek területösszegét) megkaphatjuk úgy, hogy az APD és PBC háromszögek területösszegéből levonjuk az $APGF$ és $PBEH$ négyszögek területösszegét, a másik oldalt (a PGH háromszög területét) pedig úgy, hogy az $ABEF$ trapéz területösszegéből vonjuk le ugyanezen négyszögek területösszegét, és mivel az imént láttuk, hogy a két háromszög területösszege megegyezik a trapéz területével, ebből a feladat által kért állítás már következik.

---

3. feladat: Számítsuk ki azt az n pozitív egész értéket, amelyre fennáll a következő egyenlőség:

$$\frac{1}{3} + \frac{13}{15} + \frac{33}{35} + \ldots + \frac{(2n-1)(2n+1) - 2}{(2n-1)(2n+1)} = 995 + \frac{1}{1993}.$$

Gecse Frigyes (Ungvár)

3. feladat I. megoldása: Bontsuk elemi törtekre a bal oldalon az általános tagot!

$$\frac{(2n-1)(2n+1) - 2}{(2n-1)(2n+1)} = 1 - \frac{(2n+1) - (2n-1)}{(2n+1)(2n-1)} = 1 - \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n+1}$$

Ez azt jelenti, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(2k-1)(2k+1)-2}{(2k-1)(2k+1)} = n + \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k-1} \right) =$$

$$= n + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{1} + \frac{1}{5} - \frac{1}{3} + \frac{1}{7} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n-1} \right)$$

Az összeg láthatóan teleszkopikus, és nagyban leegyszerűsíthető:

$$n - 1 + \frac{1}{2n+1} = 995 + \frac{1}{1993}$$

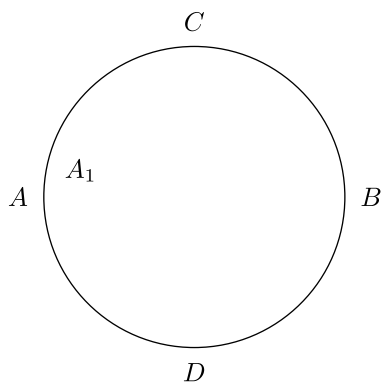
Ezt a másodfokú egyenletet n-re megoldva pedig $n = 996$ adódik értelmes eredményként.

---

4. feladat: Bizonyítsuk be, hogy az egységnyi sugarú kör belsejében adott négy különböző pont között van olyan kettő, melyeknek a távolsága kisebb, mint $\sqrt{2}$.

Oláh György (Révkomárom)

4. feladat I. megoldása: Ha a pontokat A_1, A_2, A_3, A_4 jelöléssel látjuk el, meghúzzuk az A_1 egyenesen áthaladó átmérőt, valamint azt, amely erre merőleges, akkor ez a két átmérő a kört négy negyedkörre osztja. Ha A_1 a kör középpontja, akkor bármelyik pont legfeljebb egységnyire lesz tőle, ekkor igaz a feladat állítása. Ha A_1 nem a kör középpontja, akkor legyen az AB rajta áthaladó átmérőn egy A-hoz közelebbi pont. Ha a maradék három pontból bármelyik az AB átmérő A-hoz közelebbi fele által elválasztott két negyedkörbe esik, akkor ez már közelebb lesz A_1-hez, mint $\sqrt{2}$, hiszen egy ilyen negyedkörben bármely két pont távolsága legfeljebb ekkora. Ha egyikük sem esik valamelyik ilyen negyedkörbe, akkor mindhárom az AB-re merőleges átmérő által leválasztott másik félkörben foglal helyet, ekkor a skatulyaelv szerint legalább kettő közülük ugyanabba a negyedkörbe esik, ezek pedig már legföljebb $\sqrt{2}$ távolságra lesznek egymástól.



---

5. feladat: Legyen

$$f_n(x) = f_0\left(f_{n-1}(x)\right) \text{, ahol } n = 1, 2, \dots \text{ és } f_0(x) = \frac{1}{1-x}.$$

Számítsuk ki az $f_{1994}(1993)$ értékét.

Róka Sándor (Nyíregyháza)

5. feladat I. megoldása: Számoljuk ki az első néhány n-re $f(n)$-et! $n = 1$-re $f_1(x) = f_0(f_0(x)) = \frac{x-1}{x}$, $n = 2$-re $f_2(x) = f_0(f_1(x)) = x$, $n = 3$-ra $f_3(x) = f_0(f_2(x)) = \frac{1}{1-x} = f_0(x)$. Tehát a függvény alakját csak n hármas maradéka fogja meghatározni, és mivel 1994 hármas maradéka 2 (a számjegyösszeg 23), azért $f_{1994}(x) = f_2(x)$, és így $f_{1994}(1993) = 1993$.

---

6. feladat: Igazoljuk, hogy ha bármely $a_1, a_2, \ldots, a_n (n > 1)$ valós számokra fennáll a

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i - a_{i+1}| = 2\max(a_1, a_2, \ldots, a_n) - 2\min(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

egyenlőség, akkor $n \in \{2, 3\}$. Feltételezzük, hogy $a_{n+1} = a_1$.

Bencze Mihály (Brassó)

6. feladat I. megoldása: Ha $n = 2$, akkor az állítás igaz, hiszen bármilyen a_1, a_2-re fennáll az, hogy

$$|a_1 - a_2| = |a_2 - a_1| = \max(a_1, a_2) - \min(a_1, a_2),$$

tehát az összeg nyilván a jobb oldal kétszerese lesz.

$n = 3$-ra minden lehetséges nagyságsorrendet figyelembe véve igazolható az állítás. $n > 3$-ra azonban az állítás már nem igaz, hiszen ha a nagyságviszonyok a következők:

$$a_1 \geq a_3 > a_2 \geq a_4 \geq \ldots \geq a_n$$

($\ldots$ helyén a megszokott csökkenő rendezés értendő), akkor az összeg

$$a_1 - a_2 + a_3 + a_3 - a_4 + a_4 - a_5 + \ldots + a_{n-1} - a_n + a_1 - a_n$$

teleszkopikus lesz, egyenlő lesz $2a_1 - 2a_n + 2a_3 - 2a_2$ - vel, ami viszont nem lesz egyenlő $2a_1 - 2a_n$-nel, ami a számok maximuma és minimuma különbségének kétszerese.