I. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Révkomárom, 1992. ápr. 9-12.

12. osztály

1. feladat: Határozzuk meg azon x, y egészeket, amelyekre $x^2(x^2+4xy+3y^2)$ és $y^2(y^2+4xy+3x^2)$ kifejezések egyszerre teljes negyedik hatványok.

Bencze Mihály (Brassó)

2. feladat: Egy konvex 10-szög belsejében vegyünk fel k pontot úgy, hogy bármely két pont összekötő egyenese ne tartalmazzon sem a felvett pontok, sem a sokszögcsúcsok közül még egyet. Bontsuk fel a sokszöget háromszögekre úgy, hogy minden háromszög csúcsa csak a sokszögcsúcsokkal vagy pedig a felvett pontokkal esik egybe. Bizonyítsuk be, hogy bármilyen módon bontjuk fel a sokszöget háromszögekre, a háromszögek száma mindig ugyanakkora.

Reiman István (Budapest)

3. feladat: Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{7!}+\dots$$

irracionális.

Bencze Mihály (Brassó)

4. feladat: Legyen $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ egy folytonos függvény, ahol $f(f(x))=x^{2n+1}, n\in\mathbb{N}$ és $f(1)=-1$. Igazoljuk, hogy f szigorúan csökkenő és $f(0)=0$, valamint

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Adjunk példát a fenti feltételeket kielégítő függvényekre.

Bencze Mihály (Brassó)

5. feladat: Az ABC derékszögű háromszögben meghúzzuk az átfogóra a magasságot. Az így keletkezett két háromszögnek megszerkesztjük a beírt köreit. Bizonyítsuk be, hogy a talppontból és ezen körök középpontjaiból alkotott háromszög hasonló az eredetihez!

Fonód Tibor (Komárom)

6. feladat: Vágjunk ketté egy háromszöget egy egyenessel két egyenlő területű részre úgy, hogy az egyenesnek a háromszögön belüli szakasza a lehető legrövidebb legyen.

Szabó Magda (Szabadka)