I. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Révkomárom, 1992. ápr. 9-12.

12. osztály

1. feladat: Határozzuk meg azon x, y egészeket, amelyekre $x^2(x^2+4xy+3y^2)$ és $y^2(y^2+4xy+3x^2)$ kifejezések egyszerre teljes negyedik hatványok.

Bencze Mihály (Brassó)

1. feladat I. megoldása: Legyen $a^4 = x^2(x^2+4xy+3y^2)$ és $b^4 = y^2(y^2+4xy+3x^2)$. Ekkor formális átalakításokkal $a^4+b^4 = (x+y)^4 = c^4$. A nagy Fermat-tétel azt állítja, hogy ez az egyenlet csak $abc = 0$ esetén oldható meg.

Amennyiben $a = 0$, akkor az őt előállító szorzat egyik tényezője, tehát vagy x^2, vagy $x^2+4xy+3y^2$ 0-val egyenlő, amiből három lehetőség adódik: $x = 0$, $x = -3y$, vagy $x = -y$.

Amennyiben $b = 0$, akkor hasonló módon vagy $y = 0$, vagy $y = -3x$, vagy pedig $y = -x$.

Amennyiben $c = 0$, abból $a = b = 0$ adódik, ez $x = -y$-t jelenti (beleértve, hogy esetleg mindkét szám 0).

---

2. feladat: Egy konvex 10-szög belsejében vegyünk fel k pontot úgy, hogy bármely két pont összekötő egyenese ne tartalmazzon sem a felvett pontok, sem a sokszögcsúcsok közül még egyet. Bontsuk fel a sokszöget háromszögekre úgy, hogy minden háromszög csúcsa csak a sokszögcsúcsokkal vagy pedig a felvett pontokkal esik egybe. Bizonyítsuk be, hogy bármilyen módon bontjuk fel a sokszöget háromszögekre, a háromszögek száma mindig ugyanakkora.

Reiman István (Budapest)

2. feladat I. megoldása: Jelöljük a felbontás során keletkezett háromszögek számát N-nel! Ekkor az ábra egy poliéder hálóját adja, amelynek élei a behúzott határoló oldalak, csúcsai a felvett pontok és a sokszögcsúcsok, lapjai a háromszögek, illetve az egész tízszög, mint "összekötő" lap. Az Euler-féle poliéder-tétel szerint ez azt jelenti, hogy mivel $\frac{3N+10}{2}$ él keletkezik (minden háromszögnek három oldala van, és ha a tízszög oldalait is hozzáadjuk, akkor minden élt pontosan kétszer számolunk), azért

$$10 + k + N = \frac{3N+n}{2} + 1,$$

ezt átalakítva pedig $N = 10 + 2k - 2$ adódik, tehát ennyi háromszög fog keletkezni, függetlenül k-tól, ezzel a feladat állítását beláttuk.

---

3. feladat: Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \dots$$

irracionális.

Bencze Mihály (Brassó)

3. feladat I. megoldása: A feladat ugyan nem említi, de fogadjuk el, hogy az összeg létezik (ugyanis az összeg az $1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$ összegnek egy részlete, ez pedig ismeretesen e-hez konvergál). Ha ez az összeg (jelöljük x-szel) racionális lenne, akkor felírható lenne (egy esetleges bővítéssel) $\frac{n}{2k}$ alakban, ahol n és k természetes számok. Ekkor ha a sor minden elemét megszorozzuk $(2k)!$-sal (ez megtehető, az összeg is ennyiszeresére változik), akkor

$$(2k)!\,x = A + \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)(2k+2)(2k+3)} + \dots,$$

ahol A természetes szám (a sor első $k-1$ tagjának összege $(2k)!$-sal szorozva), míg $0 < B_k < \frac{1}{2k+1} + \frac{1}{(2k+1)^3} + \ldots$ (a nevezőket csökkentettük), és a jobb oldali mértani sor összege ismert módon $\frac{2k+1}{2k(2k+2)}$, ami mindig kisebb lesz, mint 1. $(2k)!\,x$ tehát egy természetes szám és egy 0 és 1 közé eső szám összege lesz, de kezdeti föltevésünk miatt természetesnek kéne lennie, ami ellentmondás, tehát x nem lehet racionális szám.

---

4. feladat: Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy folytonos függvény, ahol $f(f(x)) = x^{2n+1}, n \in \mathbb{N}$ és $f(1) = -1$. Igazoljuk, hogy f szigorúan csökkenő és $f(0) = 0$, valamint

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Adjunk példát a fenti feltételeket kielégítő függvényekre.

Bencze Mihály (Brassó)

4. feladat I. megoldása: Tetszőleges $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ esetén ha $f(x_1) = f(x_2)$, akkor $f(f(x_1)) = f(f(x_2))$, tehát ekkor $x_1^{2n+1} = x_2^{2n+1}$, ami azt jelenti, hogy $x_1 = x_2$. Mivel f folytonos, ezért ebből már következik, hogy f szigorúan monoton is.

Tegyük fel, hogy f növekvő. Ekkor $-1 < 1$, azaz $f(-1) < f(1) = -1$, tehát $f(f(1)) = f(-1) = 1$, ez viszont ellentmondás. Ebből és az előző állításból következik, hogy f szigorúan csökkenő lesz.

$f(f(f(x)))$ kétféle megközelítése miatt a kifejezés egyrészt $f(x^{2n+1})$, másrészt $f^{2n+1}(x)$, így ez a két kifejezés minden x-re egyenlő lesz. $x = 0$-ra ez $f^{2n+1}(0) = f(0)$-t jelenti a behelyettesítés után, ebből pedig $f(0) = 0$ következik, mivel $f(-1) = 1$, és $f(1) = -1$, így $f(0)$-nak e két érték közé kell esnie, és csak $f(0) = 0$, $f(0) = 1$ és $f(0) = 2$ lehetséges.

Ha $f(x)$ felülről korlátos, akkor van egy olyan K szám, hogy bármely x-re $K > f(x)$. Ebből a szigorú csökkenés miatt $f(K) < f(f(x)) = x^{2n+1}$ következne bármely x értékre, ami nem lehetséges, tehát $f(x)$ nem lehet korlátos felülről. Ez pedig azt jelenti, hogy a szigorú csökkenés miatt a határérték $-\infty$-ben végtelen. A másik végtelen határérték hasonlóképp igazolható.

Ilyen függvényre példa lehet az $f(x) = -\operatorname{sgn}(x) \cdot |x|^{\sqrt{2n+1}}$ hozzárendelés, amely könnyen láthatóan teljesíti a feladatban megadott összes feltételt, hiszen az egyetlen gond a 0-ban való folytonosság lehet, de ott a függvény határértéke mindkét oldalról 0 lesz.

---

5. feladat: Az ABC derékszögű háromszögben meghúzzuk az átfogóra a magasságot. Az így keletkezett két háromszögnek megszerkesztjük a beírt köreit. Bizonyítsuk be, hogy a talppontból és ezen körök középpontjaiból alkotott háromszög hasonló az eredetihez!

Fonód Tibor (Komárom)

5. feladat I. megoldása: Jelöljük az átfogóhoz tartozó magasság talppontját D-vel, az ADC és BCD háromszögek beírt körének középpontjait O_1-gyel illetve O_2-vel, a sugarakat r_1-gyel, illetve r_2-vel, az ABC háromszög beírt körének sugarát r-rel. A CBD és ABC háromszögek hasonlók (két szögük megegyezik), ezért $\frac{r_1}{r} = \frac{a}{r}$. Ugyanígy ACD is hasonló ABC-hez, tehát $\frac{r_2}{r} = \frac{b}{r}$, ebből a kettőből $\frac{r_1}{r_2} = \frac{a}{b}$ következik. Tekintettel arra, hogy $O_1DO_2\angle = \frac{\pi}{2}$ és $\frac{O_1D}{O_2D} = \frac{\sqrt{2}r_1}{\sqrt{2}r_2} = \frac{a}{b}$, az állítás már következik.

---

6. feladat: Vágjunk ketté egy háromszöget egy egyenessel két egyenlő területű részre úgy, hogy az egyenesnek a háromszögön belüli szakasza a lehető legrövidebb legyen.

Szabó Magda (Szabadka)

6. feladat I. megoldása: Ha z-vel jelöljük az egyenesen azt a szakaszt, ami a háromszög belsejébe esik, γ-val azt a szöget, amelyet levág a háromszögből, és x-szel, y-nal a szög szárain (a háromszög megfelelő oldalai a és b) kialakult szakaszokat. Az ismert trigonometrikus területképlet szerint a háromszög területe $\frac{ab\sin\gamma}{2}$, ami a feltétel szerint megegyezik $2 \cdot \frac{1}{2}xy\sin\gamma$-val, ebből $ab = 2xy$.

A koszinusztétel szerint $z^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\gamma = (x-y)^2 + 2xy(1-\cos\gamma)$. Ebből látható, hogy (mivel a második tag állandó, hiszen mindkét tényezője az) z akkor lesz minimális, ha $x = y$, ekkor

$x = y = \sqrt{\frac{ab}{2}}$, ezen a két ponton át kell tehát egyenest húzni, ha minimális hosszúságot szeretnénk elérni.

A hossz azonban függ a szögtől is, konkrétan $z_{\min}^2 = ab(1-\cos\gamma)$, ami a háromszög területe szorozva $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$-vel, ez pedig akkor lesz minimális, ha a szög tangense minimális (a tangens argumentuma biztosan kisebb, mint $\frac{\pi}{2}$), ami azt jelenti, hogy a legkisebb szög szárait kell elmetszenünk az egyenessel, hogy a kívánt szakaszhosszt megkapjuk.