I. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Révkomárom, 1992. ápr. 9-12.

11. osztály

1. feladat: Az ABC háromszög AB, BC, CA oldalain felvesszük a D, E, F pontokat úgy, hogy

$$\frac{AD}{DB} = \frac{BE}{EC} = \frac{CF}{FA}.$$

Bizonyítsuk be, hogy a DEF háromszög súlypontja egybeesik az ABC háromszög súlypontjával.

Petkovics Zoltán (Szabadka)

2. feladat: Ha $n > 2$ egész szám, igazoljuk, hogy

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n \geq \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}\right).$$

Bencze Mihály (Brassó)

3. feladat: Az $(a_n), n \in \mathbb{N}$ sorozatot a következőképpen értelmezzük:

$$a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{3}\,,\ \text{és}\ a_{n+2} = \frac{a_n a_{n+1}}{3a_n - 2a_{n+1}},\ \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Adjuk meg a sorozat n-edik tagját n függvényében!

Urbán János (Budapest)

4. feladat: Az $(a_n), n \in \mathbb{N}$ sorozatot a következő feltételeket teljesíti:

$$a_0 = a_1 = \frac{2}{3}\,,\ \text{és}\ \frac{1}{4}\left(1 + 2a_{n+1} + a_n^2\right) \leq a_{n+2} \leq \frac{1}{3}\left(1 + a_{n+1} + a_n^2\right).$$

Igazoljuk, hogy a sorozat konvergens és határozzuk meg a határértékét.

Dályai Pál (Marosvásárhely)

5. feladat: Határozzuk meg az $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\} \to \mathbb{R}$ függvényt, ha

$$f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = x,$$

majd ábrázoljuk a függvényt grafikusan.

Balázs Lajos (Zselíz)

6. feladat: Az A, B, C pontok rajta vannak az $y = \frac{1}{x}$ egyenletű hiperbolán. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög magasságpontja is ezen a hiperbolán van!

Reiman István (Budapest)