I. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Révkomárom, 1992. ápr. 9-12.

11. osztály

1. feladat: Az ABC háromszög AB, BC, CA oldalain felvesszük a D, E, F pontokat úgy, hogy

$$\frac{AD}{DB} = \frac{BE}{EC} = \frac{CF}{FA}.$$

Bizonyítsuk be, hogy a DEF háromszög súlypontja egybeesik az ABC háromszög súlypontjával.

Petkovics Zoltán (Szabadka)

1. feladat I. megoldása: Jelöljük a háromszög súlypontját S-sel! Ekkor ismeretes, hogy $\vec{SA}+\vec{SB}+\vec{SC}=\vec{0}$. Tudjuk, hogy a feladatban a szakaszok közt fennálló arányt k-val jelölve $\vec{AD}=k\cdot\vec{DB}$, $\vec{BE}=k\cdot\vec{EC}$, $\vec{CF}=k\cdot\vec{FA}$. Ebből a sokszögmódszer alkalmazásával megjelentetve a már ismert vektorokat,

$$\vec{SD}+\vec{SE}+\vec{SF}=\vec{SA}+\vec{AD}+\vec{SB}+\vec{BE}+\vec{SC}+\vec{CF}$$

Bontsuk ezt alkalmas módon két részre, hogy megfeleljen céljainknak:

$$\vec{SA}+\vec{SB}+\vec{SC}+k\cdot(\vec{AB}+\vec{BC}+\vec{CA})=\vec{0},$$

hiszen a háromszög oldalait azonos körüljárás szerint vektorokként tekintve a kapott vektorok összege biztosan a nullvektor lesz. Beláttuk tehát, hogy az S-ből a D, E, F pontokba mutató vektorok összege $\vec{0}$, ez pedig csak egyetlen pontra áll, és az a háromszög súlypontja.

---

2. feladat: Ha $n>2$ egész szám, igazoljuk, hogy

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n \geq \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right).$$

Bencze Mihály (Brassó)

2. feladat I. megoldása: Zsebszámológép segítségével könnyen ellenőrizhető, hogy $n=3$-ra az egyenlőtlenség fennáll. Teljes indukcióval bizonyítunk. Tegyük fel, hogy tetszőleges $n=k$ pozitív egészre már igaz az állítás. Ismert becslés, hogy $e^x \geq 1+x+\frac{x^2}{2}$. Írjunk most x helyébe $\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+2}$-t, ekkor azt kapjuk, hogy

$$e^{\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+2}} \geq 1+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{8n^2}+\frac{1}{4n^2+4n}+\frac{1}{8(n+1)^2} >$$

$$> 1+\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+2}+\frac{1}{2n^2+2n}=1+\frac{1}{n},$$

ez pedig azt jelenti, hogy $\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n+2}>\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Ha ezt felhasználjuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1) = \left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}-\ln n\right)+\frac{1}{n+1}+\ln n-\ln(n+1) >$$

$$> \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{1}{n+1}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

---

3. feladat: Az $(a_n), n \in \mathbb{N}$ sorozatot a következőképpen értelmezzük:

$$a_1 = \frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{3}\ \text{, és}\ a_{n+2} = \frac{a_n a_{n+1}}{3a_n - 2a_{n+1}},\ \ \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

Adjuk meg a sorozat n-edik tagját n függvényében!

Urbán János (Budapest)

3. feladat I. megoldása: Írjuk át a megadott definíciót!

$$\frac{1}{a_{n+2}} = \frac{3}{a_{n+1}} - \frac{2}{a_n}$$

Ez a hozzárendelés $a_n = \frac{1}{2^{n-1}+1}$ esetén biztosan teljesülni fog.

---

4. feladat: Az $(a_n), n \in \mathbb{N}$ sorozatot a következő feltételeket teljesíti:

$$a_0 = a_1 = \frac{2}{3}\ \text{, és}\ \frac{1}{4}\left(1 + 2a_{n+1} + a_n^2\right) \le a_{n+2} \le \frac{1}{3}\left(1 + a_{n+1} + a_n^2\right).$$

Igazoljuk, hogy a sorozat konvergens és határozzuk meg a határértékét.

Dályai Pál (Marosvásárhely)

4. feladat I. megoldása: Jelöljük $\{b_n\}$-nel azt a sorozatot, amelyre teljesül, hogy

$$b_0 = b_1 = \frac{2}{3}\ \text{, és}$$

$$b_{n+2} = \frac{1}{4}\left(1 + 2b_{n+1} + b_n^2\right).$$

A $\{c_n\}$ sorozat pedig legyen a következő:

$$c_0 = c_1 = \frac{2}{3}\ \text{, és}$$

$$c_{n+2} = \frac{1}{3}(1 + c_{n+1} + c_n^2).$$

Könnyen belátható (pl. teljes indukcióval), hogy mindkét sorozat minden tagja 0 és 1 közé esik, valamint hogy mindkét sorozat monoton nő. Ebből következik, hogy konvergensek, és a hozzárendelésbe minden tag helyébe a határértéket adva formális számolással a határérték 1-nek adódik. Teljes indukcióval $b_n \le a_n \le c_n$ belátható, hiszen a megadott egyenlőtlenség bal és jobb oldala is megfelelő nagyságviszonyban állnak a b_n és c_n sorozatok megfelelő tagjaiból képzett összegekkel. Így a rendőr-elv szerint $\{a_n\}$ is konvergens, és határértéke ugyanúgy 1 lesz.

---

5. feladat: Határozzuk meg az $f : \mathbb{R} \setminus \{-1, 1, 2\} \to \mathbb{R}$ függvényt, ha

$$f\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 2f\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = x,$$

majd ábrázoljuk a függvényt grafikusan.

Balázs Lajos (Zselíz)

5. feladat I. megoldása: Vezessük be a következő jelölést: $y = \frac{x-2}{x+1}$! Beírva ezt a hozzárendelésbe

$$f\left(\frac{1}{y}\right) + 2 \cdot f(y) = \frac{y+2}{1-y}$$

Írjuk be most y-t az $\frac{x+1}{x-2}$ helyére (mindkét függvény alkalmas x választásával fölvesz bármilyen valós értéket az értelmezési tartományon, tehát a helyettesítés nem jelent megszorítást, amellett nem lesz probléma, hogy mindkét helyen az y változót alkalmazzuk).

$$f(y) + 2 \cdot f\left(\frac{1}{y}\right) = \frac{1+2y}{y-1}$$

Formálisan megoldva a kapott lineáris egyenletrendszert azt kapjuk, hogy $f(y) = \frac{4y+5}{3-3y}$, ezt pedig ábrázolható formára hozva $f(y) = -\frac{4}{3} - \frac{3}{y-1}$. Ez pedig ismeretes módon hiperbola és a szokásos módon ábrázolható.

---

6. feladat: Az A, B, C pontok rajta vannak az $y = \frac{1}{x}$ egyenletű hiperbolán. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög magasságpontja is ezen a hiperbolán van!

Reiman István (Budapest)

6. feladat I. megoldása: Helyezzük a csúcsokat egy derékszögű koordinátarendszerbe! Legyen $A\left(a; \frac{1}{a}\right)$, $B\left(b; \frac{1}{b}\right)$, valamint $C\left(c; \frac{1}{c}\right)$. Írjuk fel az A és B csúcsokhoz tartozó magasságvonalak egyenletét:

$$(b-c)x + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)y = ab - ac + \frac{1}{ab} - \frac{1}{ac}$$

$$(a-c)x + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)y = ab - bc + \frac{1}{ab} - \frac{1}{bc}$$

Ezen egyenletrendszer megoldása rövid számolás után $x = -abc$, és $y = -\frac{1}{abc}$, ez a pont pedig láthatóan rajta van a hiperbolán, és ez lesz a magasságpont, tehát az állítást beláttuk.