I. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Révkomárom, 1992. ápr. 9-12.

10. osztály

1. feladat: Igazoljuk, hogy ha $x, y, z \in \mathbb{R}$, akkor

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx \geq \frac{3}{4} \max\left[(x-y)^2, (y-z)^2, (z-x)^2\right].$$

Bencze Mihály (Brassó)

1. feladat I. megoldása: Bebizonyítjuk, hogy ha $(x-y)^2$ a maximális, akkor igaz lesz az állítás. A két másik kifejezésre a bizonyítás értelemszerűen átvihető.

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = \frac{1}{(x-y)^2 + \frac{1}{2}\left((x-z)^2 + (y-z)^2\right)} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}(x-y)^2 + \left(\frac{1}{2}(x-z+z-y)\right)^2 = \frac{1}{2}(x-y)^2 + \frac{1}{4}(x-y)^2 = \frac{3}{4}(x-y)^2$$

---

2. feladat: Hány olyan háromszög van, amelynek oldalai n-nél nagyobb, de $2n$-nél nem nagyobb egész számok? Ezek közül a háromszögek közül hány egyenlőszárú és hány egyenlőoldalú van?

Urbán János (Budapest)

2. feladat I. megoldása: A feltétel szerint a háromszög mindhárom oldala n és $2n$ közé esik, akkor a háromszögegyenlőtlenséget már biztosan teljesíteni fogják, hiszen bármely két oldal összege nagyobb lesz, mint $2n$, ez pedig nagyobb lesz bármelyik oldalnál.

Így csak ki kell választani három megfelelő egész számot n és $2n$ között, úgy, hogy egyenlők is lehetnek köztük. Ezt ismert képlet szerint $\binom{n+2}{3}$-féleképp tehetjük meg. Ezek, mint láttuk, mind megfelelő háromszögeket adnak. Az egyenlő szárúaknál meghatározhatjuk a szárak és az alap hosszát, ez $\binom{n}{2}$ lehetőség. Az egyenlő oldalúaknál csak az egyetlen oldalhosszt határozhatjuk meg, ez n lehetőség.

---

3. feladat: Jelölje N azt az 1992 jegyű számot, amelynek az összes számjegye 9-es. Mennyi N^2 számjegyeinek összege?

Bencze Mihály (Brassó)

3. feladat I. megoldása: Vegyük észre, hogy $N = 10^{1992} - 1$. Formálisan négyzetre emelve $N^2 = 10^{1992}(10^{1992} - 2) + 1$. Az első tag második tényezője csupa 9-es, kivéve az utolsó jegyet, ami 8-as. 10-hatvánnyal szorozva a számjegyösszeg nem változik, és a szorzat 0-kra végződik. Ehhez 1-et adva a számjegyösszeg 1-gyel nő, tehát végeredményben $9 \cdot 1991 + 8 + 1 = 1992 \cdot 9 = 17928$

---

4. feladat: Bizonyítsuk be, hogy

$$82!\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{82}\right)$$

osztható 1992-vel.

Mészáros József (Galánta)

4. feladat I. megoldása: Vegyük észre, hogy

$$82!\left(1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{82}\right)=82!\left(\left(1+\frac{1}{82}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{41}+\frac{1}{42}\right)\right)=83\left(\frac{82!}{1\cdot 82}+\frac{82!}{2\cdot 81}+\ldots\frac{82!}{41\cdot 42}\right)$$

A zárójelben mindegyik tag osztható 3-mal és 8-cal is, tehát a szorzat osztható $3\cdot 8\cdot 83=1992$-vel.

---

5. feladat: Adott ABC háromszög. Legyen O a körülírt körének a középpontja. B és C csúcsokból az AC és AB oldalakra bocsátott merőlegesek talppontjai E és F. Igazoljuk, hogy $AO\perp EF$.

Nagel tétele ()

5. feladat I. megoldása: Jelöljük a szögeket és az oldalakat a szokásos módon! A-t tegyük a koordinátarendszer középpontjába, és az AB egyenes legyen az x egyenes.

$$O\left(\frac{c}{2};\frac{c}{2}\operatorname{ctg}\gamma\right), F(b\cos\alpha;0), AE=c\cos\alpha, E(c\cos^2\alpha;c\cos\alpha\sin\alpha)$$

Ebből következik, hogy $\vec{AO}=\left(\frac{c}{2};\frac{c}{2}\operatorname{ctg}\gamma\right)$ és $\vec{EF}=\left(b\cos\alpha-c\cos^2\alpha;-c\sin\alpha\cos\alpha\right)$. Ezt felhasználva formális szorzással kapjuk, hogy:

$$\begin{aligned}\vec{AO}\cdot\vec{EF}&=\frac{bc}{2}\cos\alpha-\frac{c^2}{2}\cos^2\alpha-\frac{c^2}{2\sin\alpha\cos\alpha\operatorname{ctg}\gamma}=\\&=\frac{c}{2}\cos\alpha(EC-BE\operatorname{ctg}\gamma)=\frac{c}{2}\cos\alpha(EC-EC)=0\end{aligned}$$

Ezzel pedig beláttuk az állítást, hiszen a két szakaszt jellemző vektorok skalárszorzata 0, és a vektorok hossza nem 0, tehát merőlegesek egymásra.

---

6. feladat: Az ABC derékszögű háromszög S súlypontjából bocsássunk merőlegeseket az oldalakra. Legyenek ezek talppontjai A_1, B_1, C_1. Számítsuk ki a $\mathrm{Ter}(ABC)/\mathrm{Ter}(A_1B_1C_1)$ arányt.

Mészáros József (Galánta)

6. feladat I. megoldása: Ha az átfogóhoz tartozó magasságot m_c-vel jelöljük, a háromszög szögeit pedig a szokásos módon, akkor egyrészt láthatjuk, hogy az $A_1B_1C_1$ háromszög területe előáll az A_1SB_1, B_1SC_1 és A_1SC_1 háromszögek területének összegeként, ezen területeket felírva a háromszög ismert trigonometrikus területképletének segítségével pedig kapjuk, hogy a terület nem más, mint

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{3}\cdot\frac{b}{3}\sin\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{m_c}{3}\cdot\frac{a}{3}\sin\alpha+\frac{1}{2}\cdot\frac{m_c}{3}\cdot\frac{b}{3}\sin\beta$$

(az oldalakon kialakuló $\frac{a}{3}$, illetve $\frac{b}{3}$ szakaszok a párhuzamos szelők tételének következményei), és ugyanígy kaphatjuk, az átfogóra bocsátott merőleges $\frac{m_c}{3}$ hosszúságát is, a súlyvonalat és a C pontból induló magasságot is behúzva.

Felhasználva továbbá, hogy $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, és így $\sin\beta=\cos\alpha$, valamint a $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, azaz $\sin^2\alpha+\sin^2\beta=1$ egyenlőség alapján $\sin\alpha$ és $\sin\beta$ értékét definíció szerint beírva és c-vel átszorozva kapjuk, hogy $a\sin\alpha+b\sin\beta=c$, tehát a fenti összeg végső soron $\frac{2}{9}$-ed része az ABC területének, tehát a feladat által kért arány $\frac{9}{2}$ lesz.