I. Nemzetközi Magyar Matematika Verseny

Révkomárom, 1992. ápr. 9-12.

9. osztály

1. feladat: Bizonyítsuk be, hogy ha $n > 1$ természetes szám, akkor $n^8 + n^4 + 1$ összetett szám.

Mészáros József (Galánta)

1. feladat I. megoldása: Vegyük észre, hogy $n^8 + n^4 + 1 = (n^4 + 1)^2 - n^4$. Ez pedig ismert azonosság alapján $(n^4 - n^2 + 1)(n^4 + n^2 + 1)$ formába írható, amelynek $n > 1$ esetén mindkét tényezője 1-nél nagyobb, tehát a szorzat értéke nem lehet prímszám, vagyis mindig összetett szám lesz.

---

2. feladat: Mely p pozitív prímszámokra lesz $2p + 1$, $3p + 2$, $4p + 3$, $6p + 1$ mindegyike prímszám?

Urbán János (Budapest)

2. feladat I. megoldása: $p = 2$ és $p = 3$ esetén a kérdéses kifejezések értéke nyilvánvalóan nem lesz prím. $p = 5$-re könnyen ellenőrizhetően minden szám prím lesz (a kifejezések értéke rendre 11, 17, 23, 31). Az 5-nél nagyobb prímekre pedig valamelyik kifejezés mindig összetett lesz, hiszen ha a maradék 1, akkor $3p + 2$, ha 2, akkor $2p + 1$, ha 3, akkor $4p + 3$, ha 4, akkor pedig $6p + 1$ lesz 5-tel osztható a maradékokkal való számolási szabályok alapján.

---

3. feladat: Igazoljuk, hogy ha $a + b + c = 0$, akkor

$$6(a^5 + b^5 + c^5) = 5(a^2 + b^2 + c^2)(a^3 + b^3 + c^3).$$

Bencze Mihály (Brassó)

3. feladat I. megoldása: Használjuk fel, hogy a feladat állítása szerint $c = -(a + b)$! Fejtsük ki az egyenlőség két oldalát ezt felhasználva!

$$\begin{aligned} 6(a^5 + b^5 + c^5) &= 6(a^5 + b^5 - (a + b)^5) = -6(5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4) \\ &= -30ab(a^3 + 2a^2b + 2ab^2 + b^3) = 30ab(a + b)(ab - (a + b)^2) \end{aligned}$$

A másik oldalt kifejtve a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} 5(a^2 + b^2 + c^2)(a^3 + b^3 + c^3) &= 5(2a^2 + 2b^2 + 2ab)(-3ab(a + b)) \\ &= 30ab(a + b)(ab - (a + b)^2). \end{aligned}$$

Láthatóan mindkét esetben ugyanazt kaptuk. Ezek szerint tehát $a + b + c = 0$ teljesülése esetén az egyenlőség is biztosan igaz lesz.

---

4. feladat: Adott ABC háromszög és $D \in BC$, $E \in AC$, $F \in AB$ pontok. Az A csúcson át párhuzamost húzunk a BC oldallal, amely a DE egyenest M-ben és a DF egyenest N-ben metszi. Igazoljuk, hogy AD, MF, NE akkor és csakis akkor mennek át egy ponton, ha D a BC oldal felezőpontja.

Bencze Mihály (Brassó)

4. feladat I. megoldása: Alkalmazzuk Ceva tételét a DMN háromszögben az oldalak F, E, A belső pontjaira nézve. Eszerint a kérdéses egyenesek pontosan akkor mennek át egy ponton, ha az oldalak osztásarányainak szorzata valamely körüljárás szerint 1, azaz ebben az esetben $\frac{MA}{AN} \cdot \frac{NF}{FD} \cdot \frac{DE}{EM}$ szorzat 1-gyel lesz egyenlő. Felhasználva, hogy az AEM és az EDC, valamint az ANF és az FDB háromszögek hasonlók, ez a szorzat $\frac{MA}{AN} \cdot \frac{AN}{BD} \cdot \frac{DC}{MA}$-val lesz egyenlő, ami egyszerűsítés után $\frac{DC}{BD}$. Ennek kell 1-nek lennie, hogy az egyenesek egy ponton menjenek át. Ekkor viszont $DC = BD$ már adódik, és ezt kellett bizonyítanunk.

---

5. feladat: Határozzuk meg az x, y egész számokat, ha $x^2 - 2xy + 2y^2 - 4y^3 = 0$.

Balázs Lajos (Zselíz)

5. feladat I. megoldása: Némi átalakítás után az egyenlet

$$(x-y)^2 = y^2(4y-1)$$

alakba írható. $y = 0$-ból $x = 0$ következik, és ez láthatóan megoldás is. Ha $y \neq 0$, akkor $4y - 1$ négyzetszám, de egy négyzetszám 4-es maradéka mindig 0 vagy 1. Tehát az egyetlen megoldás $x = y = 0$.

---

6. feladat: Legyenek x_a, x_b, x_c az ABC hegyesszögű háromszög tetszőleges P belső pontjának az a, b, c oldalaktól mért távolságai, valamint m_a, m_b, m_c a megfelelő magasságok. Igazoljuk, hogy

$$\frac{x_a}{m_a} + \frac{x_b}{m_b} + \frac{x_c}{m_c} = 1.$$

Mészáros József (Galánta)

6. feladat I. megoldása: Az ABC háromszög az ABP, BCP és ACP háromszögekből áll össze, így területe megkapható ezek területösszegeként. Ennek következtében az

$$\frac{x_a}{m_a} + \frac{x_b}{m_b} + \frac{x_c}{m_c}$$

összeg, amely megegyezik az BCP, ACP és ABP háromszögek ABC háromszöghöz vett területarányainak összegével (azonos oldalhoz tartozó magasságok arányai), az első megfontolásunk miatt 1-gyel lesz egyenlő, ezzel az állítást bebizonyítottuk.