

46. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2. nap

NYOLCADIK OSZTÁLY

1. Egy pozitív prímszámokból álló, növekedő sorozatban az egymást követő tagok különbsége 12. Melyik a leghosszabb ilyen sorozat?

1. megoldás

Mivel 12-vel növelünk, ezért minden lépésben 2-vel növekszik az egyesek helyén álló számjegy. Ha páros számmal kezdődik a sorozat, akkor csak egy elemű lehet, mert a 2 az egyetlen páros prím. Az utolsó számjegyek tehát az $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ halmazból kerülnek ki. Ráadásul valahonnan kezdve, ebben a sorrendben fogják egymást ciklikusan követni.

Ha egy sorozat legalább 5 elemből áll, akkor szerepel benne az 5, mint utolsó számjegy. Ekkor a szám maga is csak 5 lehet, mert az az egyetlen 5-re végződő prím. Az 5 viszont csak az első elem lehet, hiszen a pozitívak a sorozat elemei és 12-vel növekszik. A leghosszabb sorozat tehát: 5, 17, 29, 41, 53.

2. megoldás

Tegyük fel, hogy a sorozat legalább 5 tagból áll. Vegyük észre, hogy a p , $p + 12$, $p + 24$, $p + 36$ és $p + 48$ számok mind különböző maradékot adnak 5-tel osztva, mert a lehetséges különbségeik 12, 24, 36 vagy 48 nem oszthatók 5-tel. Mivel 5-ös maradékból 5-féle van, az egyikük osztható 5-tel. Ez csak $p = 5$ lehet, mert pozitív prímekekről van szó.

Tehát a legalább 5 tagból álló sorozatnak így kell kezdődnie: 5, 17, 29, 41, 53, ami mind prím, tehát 5 tagja lehet a sorozatnak. 6 tagja viszont nem lehet, mert a következő szám, a 65 nem prímszám.

2. Két játékos, A (aki a játékot kezdi) és B a következő játékot játsszák: felváltva törölnek egy-egy számjegyet a 876543210 számból, amíg csak egyetlen jegy marad.

Ha a nyolc törlés bármelyike után a számjegyeket összeolvasva a szám osztható négygel, B nyeri a játékot, egyébként pedig A . Van-e valamelyik játékosnak nyerő stratégiája? Ha van, adj is meg egy nyerő stratégiát.

(Ha a játék végén 0 marad, akkor B nyert, hiszen 0 osztható 4-gyel.)

1. megoldás

Megmutatjuk, hogy B -nek van nyerő stratégiája.

Ha A az első lépésben 2-nél nagyobb számot töröl, akkor B az 1-es törlésével eléri, hogy a szám 20-ra végződjön. Ha A az első lépésben 2-nél kisebbet töröl, akkor B a másik 2-nél kisebb jegy törlésével eléri, hogy a szám 32-re végződjön. Mindkét esetben B nyert.

Marad az az eset, hogy A elsőre a 2-est törli. Ekkor törölje B az 1-est, a megmaradó szám így 8765430.

Ha A most a 3-ast törli, B azonnal nyer. Ha 4-nél nagyobb számot töröl, akkor B a 3-as törlésével eléri, hogy a szám 40-re végződjön, ekkor is B nyer.

Tehát A csak a 4-est vagy 0-t törölheti. Törölje ekkor B a 3-ast, így a megmaradó szám $\overline{8765N}$, ahol $N = 0$ vagy $N = 4$.

Ha A 6-nál nagyobb számot töröl, akkor B az 5-ös törlésével eléri, hogy a végződés $\overline{6N}$ legyen, ami 4-gyel osztható. Ha A az 5-öst törli, a végződés $\overline{6N}$, ekkor is B nyer. Ha A a 4-est törli, akkor B az 5-ös törlésével eléri, hogy 76 legyen a végződés, ekkor is ő nyer.

Marad az az eset, hogy A a 6-ost törli, ekkor törölje B az 5-öst, megmarad $\overline{87N}$.

Ekkor bármit is lép A , az utolsó lépésben B meg tudja hagyni 8 és N közül valamelyiket, és mivel ez mindenképpen 4-gyel osztható szám, megnyeri a játékot.

2. megoldás

B számára egy lehetséges nyerő stratégia a következő: törölje sorra az 1, 3, 5, 7 számjegyeket. Ha ezek közül valamelyik már korábban törlődött, akkor helyette B tetszőleges másik jegyet törölhet. Megmutatjuk, hogy ilyen lépésekkel a játék során valamikor biztosan 4-gyel osztható számot kapunk.

Ha A az első lépésben 2-nél nagyobb számot vagy 0-át törölt, akkor az 1-es törlése után a kapott szám 20-ra vagy 32-re végződik, tehát 4-gyel osztható. Ha A az 1-est törli, azonnal 4-gyel osztható számot kapunk. Marad az az eset, hogy A elsőként a 2-es jegyet törölte.

Három lépéspár után a megmaradó 3 jegy ekkor csak a 8, 7, 6, 4, 0 számok közül kerülhet ki. Ha a 7 és a 6 is megmaradt, akkor B nyert, hiszen a 876, 764, 760 számok mindegyike osztható 4-gyel. Ha a 7 már törlődött, akkor a szám végződése 64, 60 vagy 40, ekkor is 4-gyel osztható számot kaptunk. Ha a 7-es megmaradt, de a 6-os nem, akkor az utolsó lépéspár után csak a 8, 4, 0 számok valamelyike maradhat meg, ezek viszont 4-gyel oszthatók. Így B minden esetben megnyerte a játékot.

3. Egy 5×5 -ös táblázat mezőibe beírtuk a pozitív egész számokat 1-től n -ig (mindegyiket egyszer), a kimaradó mezőkbe pedig nullákat írtunk. A kitöltést *érdekesnek* nevezünk, ha minden sorban és minden oszlopban egyenlő a beírt számok összege. Melyik a legkisebb pozitív egész n , melyre található *érdekes* kitöltés?

Megoldás

A beírt számok összege $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ osztható 5-tel, ez csak úgy lehet, ha n vagy $n+1$ 5-tel osztható. Ezek alapján a lehetséges n értékek és a hozzájuk tartozó S sorösszegek:

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
Nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

n	S
4	2
5	3
9	9
10	11
14	21
15	24
19	38
20	42
24	60
25	65

Az $n = 4$ és $n = 5$ eset nyilván nem lehetséges, mert van nagyobb beírt szám, mint a sorösszeg.

Az $n = 9$ és $n = 10$ szintén nem jó, mert az első esetben a 8-as sorába vagy oszlopába nem jut jó pár a 8 mellé, a második esetben pedig a 10-es sorába vagy oszlopába nem jut jó pár a 10 mellé.

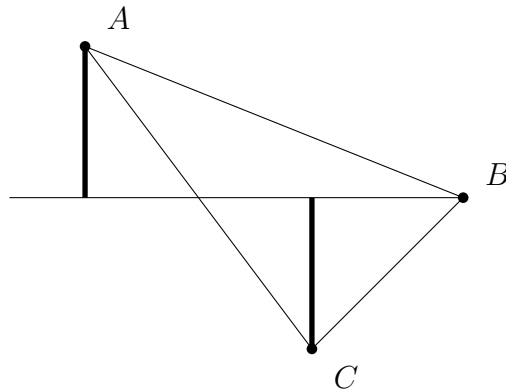
Az $n = 14$ eset megvalósítható:

5	3	13		
6	1			14
	4	8	9	
	2		12	7
10	11			

4. Melyek azok az $ABCD$ négyszögek, melyek belsejében található olyan P pont, hogy a PA , PB , PC , PD szakaszok a négyszög belsejében haladnak, és az ABP , BCP , CDP és DAP háromszögek területe mind egyforma? Igyekezz minél egyszerűbb jellemzést adni!

Megoldás

Mivel $T_{ABP} = T_{BCP}$, ezért A és C egyenlő távolságra vannak a BP egyenestől (ez a távolság az ABP és BCP háromszögek BP -hez tartozó magassága). Ez kétféle módon lehetséges: AC párhuzamos BP -vel, vagy BP átmegy az AC szakasz felezőpontján. Mivel az első lehetőség nem áll fenn, így a BP egyenes átmegy az AC átló felezőpontján.



Hasonló logikával a DP egyenes is átmegy az AC szakasz felezőpontján. Ez kétféleképpen lehetséges:

- (a) P az AC szakasz felezőpontja.
- (b) BP és DP egy egyenesre esik: a P pontot és az AC felezőpontját összekötő egyenesre.

Az (a) esetben AC belső átló kell hogy legyen. A $T_{PAB} = T_{DAP}$ feltételt is felhasználva következik, hogy az AC belső átló felezi a négyszög területét, és P ennek az átlónak a felezőpontja. Megfordítva: ha egy négyszög egyik átlója felezi a területét, akkor ennek az átlónak a felezőpontja jó P -nek, hiszen a súlyvonal felezi a háromszög területét.

A (b) esetben a BD átlóról derült ki, hogy felezi a négyszög területét, és P ezen átló felezőpontja kell, hogy legyen.

Tehát azok a jó négyszögek, amelyek egyik átlója felezi a négyszög területét. Egy ezzel egyenértékű leírás: a négyszög egyik átlója átmegy a másik átló felezőpontján.