

46. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 1. nap

NYOLCADIK OSZTÁLY

1. Lehet-e találni két egymást követő kettőhatványt, melyek összege négyzetszám? (Kettőhatványnak nevezzük az $1, 2, 4, 8, 16, \dots$ sorozat tagjait, ahol minden tag az őt megelőző kétszerese.)

Megoldás

Vegyük észre, hogy $2^n + 2^{n+1} = 2^n \cdot (1 + 2) = 2^n \cdot 3$. A számelmélet alaptétele miatt ez a szám osztható 3-mal, de nem osztható 9-cel. A 3-mal osztható négyzetszámok azonban 9-cel is oszthatók, mert az alapjuknak is oszthatónak kell lennie 3-mal. Tehát a feladat kérdésére a válasz: nem lehet találni.

2. Egy sokszög minden oldalának hossza centiméterben mérve egész szám, az összes belső szögének nagysága pedig 60° vagy 240° . Lehet-e a sokszög oldalainak száma

(a) 2016?

(b) 2017?

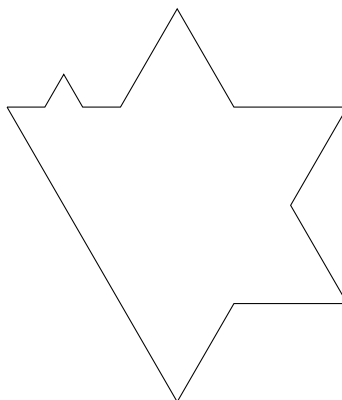
Megoldás

- (a) Igen. Induljunk ki egy szabályos háromszögből. Ennek egyik oldalát helyettesítsük az alábbi töröttvonalal (úgy, hogy a töröttvonal túske alakú része kifelé álljon):



Ennek a töröttvonalnak minden szakasza harmada az eredeti háromszög oldalának, és összesen hárommal növelte sokszögünk oldalszámát (egy oldalból lett négy), és a három újonnan keletkező szög rendre 240° , 60° és 240° . A lépést megfelelően sokszor ismételve tetszőleges hárommal osztható oldalszámot megkaphatunk, és ha a kapott sokszögben a legrövidebb oldal hosszát egésznek választjuk, akkor minden oldala egész hosszúságú lesz. Mivel 2016 osztható 3-mal, a fent leírt módszerrel tudunk megfelelő 2016 oldalú sokszöget konstruálni.

Példa egy 12 oldalú sokszögre (háromféle oldalhosszúsággal):



- (b) Nem. Legyen a darab 60° -os és b darab 240° -os szöge a sokszögnek. Ekkor $a + b = 2017$ és $a \cdot 60^\circ + b \cdot 240^\circ = 2015 \cdot 180^\circ$, felhasználva, hogy egy n -csúcsú sokszög belső szögeinek összege $(n - 2) \cdot 180^\circ$. 60 -nal osztva: $a + 4b = 2015 \cdot 3$, ahonnan $a + b = 2017$ -et felhasználva $2017 + 3b = 3 \cdot 2015$. Ez viszont nem lehetséges, mert az egyenlőség bal oldala nem osztható 3 -mal, a jobb oldal viszont igen.
3. Ki lehet-e színezni a sík pontjait négy színnel úgy, hogy ne lehessen találni négy darab egyszínű pontot, melyek egy téglalap négy csúcsát alkotják?

Megoldás

Bárhogy is színezzük ki a sík pontjait, lesz egyszínű téglalap.

Tekintsünk a síkon egy 4×1024 -es rács téglalapot. Ebben a téglalapban minden vízszintes rács egyenesen 5 rácpont van, így egy ilyen szakaszt $4^5 = 1024$ féle módon lehet kiszínezni. Mivel a téglalapunk 1025 darab ilyen 5 rácpontot tartalmazó vízszintes szakaszt tartalmaz, ezért a skatulyaelv alapján lesz kettő vízszintes szakasz, melyek azonos módon lesznek színezve. Mostantól csak ezt a két egyformán színezett szakaszt tekintjük. Mivel 5 pontból állnak, lesz rajtuk $2 \cdot 2$ egyformán színezett pont, és ezek ugyanabban a pozícióban is választhatók, hiszen egyformán van színezve a két szakasz. Az így kapott négy pont egy téglalapot alkot.

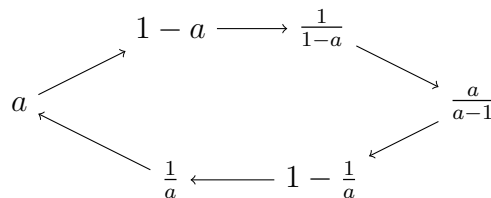
4. Egy 0 -tól és 1 -től különböző racionális számból kiindulva egy lépésben végrehajthatjuk a következő két művelet valamelyikét: vehetjük egy meglévő szám reciprokát, vagy egy meglévő számot kivonhatunk egyből. Ezeket a lépéseket addig ismételjük, amíg már nem jöhet ki új szám. A kiinduló szám értékétől függően hányféle számot kaphatunk ilyen módon? Az összes lehetőségre mutass példát!

Megoldás

A megoldás elején megjegyezzük, hogy semelyik lépés során nem kapunk 0 -t vagy 1 -et, mert 0 -t

csak 1-ből, 1-et pedig 0-ból vagy 1-ből kaphatunk csak.

A megadott lépéseket kétszer megismételve az eredeti számot kapjuk vissza: $1 - (1 - x) = x$ és $1/(1/x) = x$ (ha $x \neq 0$). Ez azt jelenti, hogy a kétféle lépést csak felváltva érdemes végrehajtani. Az a számból az $1 - x$ lépéssel indulva hat lépés után visszajutunk a -hoz:

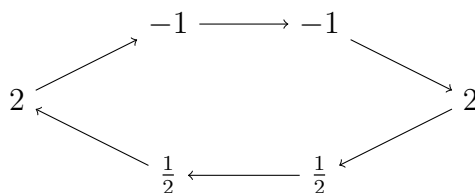


Vegyük észre, hogy ha az $1 - x$ helyett az $1/x$ lépéssel indítunk, ugyanezt a hatszöget kapjuk, csak az óramutató járásával ellentétes körüljárással.

Lássuk, mi történik, ha a 6 szám között vannak egyenlők. Mivel a kört bármelyik pontjából indíthatnánk, feltehetjük, hogy a egyenlő valamelyik másik számmal.

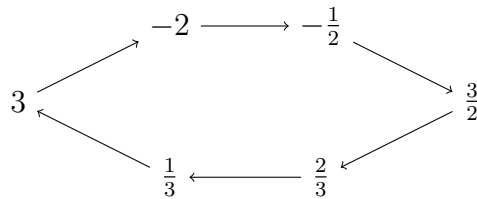
- Ha $a = \frac{1}{a}$, akkor $a = -1$ (mert az $a = 1$ esetet kizártuk).
- Ha $a = 1 - a$, akkor $a = \frac{1}{2}$.
- Az $a = \frac{1}{1-a}$ egyenletnek nincs megoldása: átrendezve $a(1 - a) = 1$, tehát mindkét tényező pozitív, és ekkor mindkettő 0 és 1 között van, vagy mindkét tényező negatív, ami lehetetlen, mert az összegük 1.
- Az $a = 1 - \frac{1}{a}$ egyenletnek nincs megoldása: átrendezve $a + 1/a = 1$, de ha a pozitív, akkor a vagy $1/a$ legalább 1, ha a negatív, akkor $a + 1/a$ is negatív.
- Ha $a = \frac{a}{a-1}$, akkor $a = 2$ (mert az $a = 0$ esetet kizártuk).

Azt figyelhetjük meg, hogy az egybeeső értékek esetei egyetlen „körben” helyezkednek el:



Itt tehát 3 különböző számot kapunk (a kiinduló számot is beleértve).

Minden más esetben a hat formula különböző értéket ad (és értelmezve van a kikötések miatt). Például:



Tehát a kiinduló számtól függően három vagy hat különböző értéket kaphatunk, beleszámolva a kiinduló értéket is.

5. 16 csapat körmérkőzést játszik, mindenki mindenkivel pontosan egyszer találkozik. Minden mérkőzésen az egyik csapat nyer, a másik veszít, döntetlen nincs.
 Legfeljebb hány csapatnak lehet legalább 12 győzelme?

Megoldás

Legyen x darab ilyen csapat. Mivel ők egymás között $x(x-1)/2$ meccset játszottak, a többivel pedig $x(16-x)$ meccset, így összesen legfeljebb $x(x-1)/2 + x(16-x)$ győzelmet szerezhettek. Mivel mindegyikük legalább 12 győzelmet aratott, így

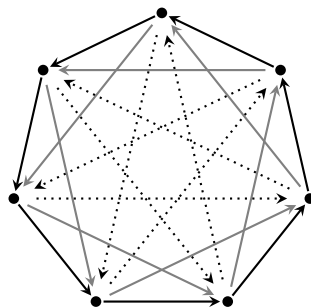
$$12x \leq x(x-1)/2 + x(16-x).$$

Átrendezve

$$0 \leq x \left(\frac{7}{2} - \frac{x}{2} \right),$$

ahonnan $x \leq 7$ jön ki.

$x = 7$ -re megadható jó konstrukció: a 7 „kijelölt” csapat mindegyike verje meg a maradék 9 csapat mindegyikét, egymás között pedig három darab hét hosszú körbeveréssel mindenkinek lesz még 3 győzelme (lásd az ábrát, a nyíl a legyőzöttől mutat a legyőzőt).



A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Juhász Péter, Steller Gábor.
 Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TV-16-0077. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.