



46. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

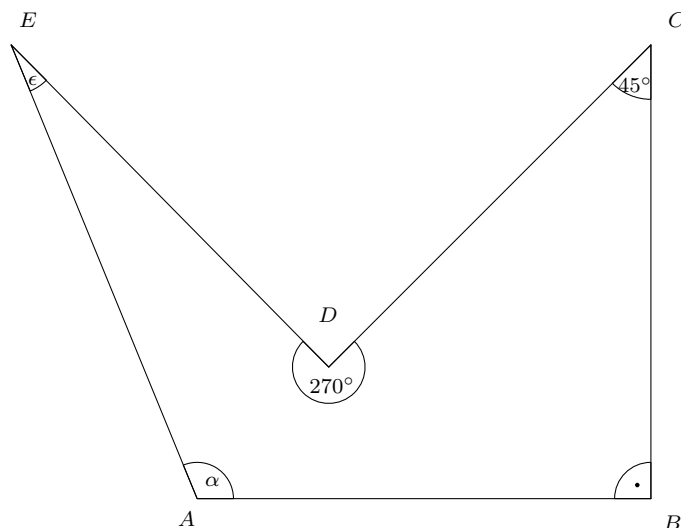
Megyei forduló

NYOLCADIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. Az $ABCDE$ ötszögre teljesül, hogy $AB = BC = CD = DE$, a B -nél lévő szög derékszög, a C -nél lévő szög 45° , a D -nél lévő szög pedig 270° . Mekkora az ötszög A és E csúcsánál lévő szögei?

Megoldás Készítsünk először is egy, a feltételeknek eleget tévő ábrát:



(1 pont)

Az ABC háromszög egyenlő szárú, melynek szárszöge 90° , így $ACB \sphericalangle = 45^\circ$. (1 pont)

Mivel $DCB \sphericalangle = 45^\circ$ a feladat feltételei szerint, így az A , D és C pontok egy egyenesre esnek. (1 pont)

Mivel az EDC háromszög egyenlő szárú, melynek szárszöge 90° , így $ECD \sphericalangle = 45^\circ$. (1 pont)

$CE = CA$, hiszen a CDE és az ABC háromszögek egybevágók (két oldaluk és a köztük lévő szög megegyezik), (1 pont)

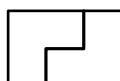
amiből kapjuk, hogy $CAE \sphericalangle = CEA \sphericalangle = 67,5^\circ$. (1 pont)

Így végül adódik, hogy az A csúcsnál lévő szög, $\alpha = 45^\circ + 67,5^\circ = 112,5^\circ$, illetve $\epsilon = 67,5^\circ - 45^\circ = 22,5^\circ$, hiszen az $DEC \sphericalangle = 45^\circ$ is teljesül. (1 pont)



(A feladat befejezésénél hivatkozhatunk arra a jól ismert tényre is, hogy az ötszögek szögeinek összege $3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$). Összesen: 7 pont

2. L-alakú, 3 négyzetből álló alakzatokkal kirakható legkisebb területű téglalap a 2×3 -as (ld. ábra). Mekkora a legkisebb **páratlan** területű téglalap, amely kirakható ilyen elemekkel? (A kirakás azt jelenti, hogy átfedés nélkül, hézagmentesen lefedjük a téglalapot.)



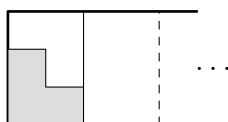
Megoldás

A terület csak úgy lehet páratlan, ha mindkét oldal hossza páratlan. (1 pont)

Minden L-alakzat 3 egységnyi területet fed le, így a téglalap területének 3-mal oszthatónak kell lennie. Ezért legalább az egyik oldalhossz hárommal osztható. (1 pont)

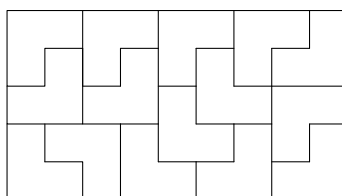
Egy 3 egység hosszúságú oldal mentén a két sarokmezőt különböző L-alakzatok tudják csak lefedni, de ezek csak úgy helyezhetők el, hogy egy 3×2 -es téglalapot alkotnak. (1 pont)

A fennmaradó téglalapra ezt a gondolatot megismételve újabb 3×2 -es téglalapot kapunk, és így tovább, míg végül az egész téglalapot lefedjük 3×2 -es téglalapokkal. Ez viszont csak akkor lenne lehetséges, ha az oldalhossza páros lenne. (1 pont)



Tehát a 3-mal osztható hosszúságú oldal hossza legalább 9 egység, míg a másik oldal hossza legalább 5 egység, így a terület legalább 45 egység. (1 pont)

Ez meg is valósítható az 5×9 -es téglalap kirakásával, például az alábbi módon:

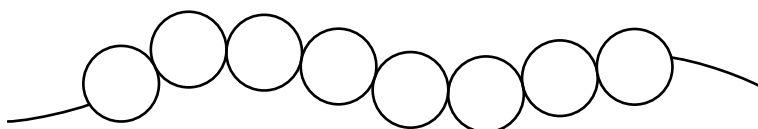


(2 pont)

Összesen: 7 pont



3. Hány olyan 8 gyöngyből álló gyöngysort lehet összeállítani, ahol minden gyöngy kék, piros, vagy zöld, a szomszédosak különböző színűek, az első és az utolsó gyöngy színe pedig megegyezik? (Két gyöngysor különböző, ha balról jobbra haladva van olyan pozíció, ahol különböző színű gyöngyöket tartalmaznak.)



1. megoldás

Kezdjük el felépíteni a gyöngysort balról. Tegyük fel, hogy kézzel indítunk. A betűk jelzik, hogy milyen színű az éppen aktuális gyöngy, a számok pedig azt, hogy az éppen aktuális gyöngyig hányféle gyöngysor volt felépíthető:

$$K(1) \rightarrow K(0), P(1), Z(1) \rightarrow K(2), P(1), Z(1) \rightarrow K(2), P(3), Z(3) \rightarrow K(6), P(5), Z(5) \rightarrow K(10), P(11), Z(11) \rightarrow K(22), P(21), Z(21) \rightarrow K(42)$$

(4 pont)

A rekurzió szabálya a második lépéstől kezdve következő volt:

$$K(k), P(p), Z(z) \rightarrow K(p+z), P(k+z), Z(k+p),$$

hiszen ha például kék gyönggyel szeretnénk folytatni a sort, akkor előtte a sor piros vagy zöld gyönggyel végződött.

(2 pont)

Így a feladat kérdésére a válasz $3 \cdot 42 = 126$.

(1 pont)

Összesen: 7 pont

2. megoldás (Az előző megoldás kissé módosított változata.)

Jelölje $a(n)$ azt, hogy hány olyan n gyöngyből álló gyöngysor van, melyben az első és az utolsó gyöngy azonos színű, $b(n)$ pedig azt, hogy hány olyan n gyöngyből álló gyöngysor van, melyben az első és az utolsó gyöngy különböző színű. Nyilván $a(1) = 3$ és $b(1) = 0$. Vegyük észre, hogy $a(n+1) = b(n)$. Valóban, ha az első és utolsó gyöngy színe azonos, akkor az első és az utolsó előtti gyöngy színe különböző, és egy ilyen elrendezést egyértelmű befejezni.

(2 pont)

Hasonlóan, $b(n+1) = 2a(n) + b(n)$ is teljesül, hiszen ha az első n gyöngyből álló sorban ugyanaz az első és az n . gyöngy színe, akkor kétféle módon lehet befejezni ezt a sort, ha pedig különböző, akkor egyféle módon.

(2 pont)

Ezután egyszerű számolással $a(2) = 0$, $b(2) = 6$, $a(3) = 6$, $b(3) = 6$, $a(4) = 6$, $b(4) = 18$, $a(5) = 18$, $b(5) = 30$, $a(6) = 30$, $b(6) = 66$, $a(7) = 66$, $b(7) = 126$, $a(8) = 126$.

(2 pont)

Tehát a feladat kérdésére a válasz 126.

(1 pont)



Összesen: 7 pont

3. megoldás

Tegyük fel, hogy az első (és így az utolsó) gyöngyszem kék. Megszámoljuk az ilyen eseteket, majd szorzunk hárommal, mert piros és zöld is lehet az első gyöngy. (1 pont)

Felsoroljuk, hogy hol lehet még kék gyöngy a sorban (a kék gyöngyszemek száma szerint csoportosítva az eseteket).

- K.K.K..K
- K..K.K.K
- K.K..K.K
- K.K....K
- K..K...K
- K...K..K
- K....K.K
- K.....K

(3 pont)

Minden pontozott „szakasz” (két kék gyöngy közötti rész) kétféle lehet, mert a kezdő szín eldöntése után váltogatni kell a színeket. Tehát ha k „szakasz” van, akkor 2^k a színezések száma az adott esetben. Így összesen $3 \cdot 2^3 + 4 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2 = 24 + 16 + 2 = 42$ eset van, amikor késsel kezdünk. (2 pont)

Tehát a lehetőségek száma $3 \cdot 42 = 126$. (1 pont)

Összesen: 7 pont

4. megoldás

Írjuk fel egy körvonalra a piros, kék és zöld színeket. Egy jó gyöngysornak megfelel egy lépéssorozat a körvonalon, ahol minden lépésben az óramutató járásával megegyező vagy ellenkező irányban lépünk, és a végén ugyanoda lyukadunk ki, ahonnan indultunk. (2 pont)

Ez azzal egyenértékű, hogy az óramutató járásával megegyező és ellentétes lépések hármasa maradéka megegyezik. Mivel összesen 7-et lépünk, így a lehetőségek: 5 lépés az óramutató járásával megegyező irányban, 2 ellentétesen, illetve ez az eset a megegyező és ellentétes szavakat felcserélve. (2 pont)

Mivel bármely színről indulhatunk, a válasz: $3(7 \cdot 6/2 + 7 \cdot 6/2)$, (2 pont)
ami 126. (1 pont)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: A helyes eredmény közlése indoklás nélkül 3 pontot ér.



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014



4. Egy téglatest minden élének hosszúsága egyjegyű pozitív egész szám. Minden lapra ráírtuk a területét. A lapokon lévő számok reciprokait összeadva az eredmény $\frac{2}{7}$. Mekkora a téglatest élei?

Megoldás Jelölje a téglatest éleit x, y, z . Így a feltételt kifejezhetjük az alábbi módon:

$$\frac{2}{xy} + \frac{2}{yz} + \frac{2}{zx} = \frac{2}{7},$$

ahonnan rendezés után adódik, hogy

$$7(x + y + z) = xyz.$$

(2 pont)

A bal oldal osztható 7-tel, így a jobb oldal is. De mivel az élek hosszúsága egyjegyű egész szám, a 7 pedig prím, így valamelyik élhossznak 7-nek kell lennie.

(2 pont)

Legyen ez mondjuk a z . Így az alábbi egyenlethez jutunk:

$$x + y + 7 = xy,$$

ami szorzattá alakítással az alábbi alakra hozhatunk:

$$(x - 1)(y - 1) = 8.$$

(2 pont)

Tegyük fel, $x \geq y$, azaz az első tényező legalább akkora, mint a második. Figyelembe véve, hogy a bal oldal tényezői nemnegatívak, így a lehetséges felbontások:

$$8 \cdot 1; \quad 4 \cdot 2$$

ahonnan rögtön adódnak a megoldások: $(9; 2; 7)$ és $(5; 3; 7)$.

(1 pont)

Természetesen ezek bármely más sorrendje is jó megoldás, hiszen a $z = 7$, illetve $x \geq y$ feltételek önkényesek voltak, az ismeretlenek szerepe pedig szimmetrikus.

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Mivel egyjegyű pozitív egész számokról van szó a feladatban, az $x + y + 7 = xy$ egyenlet próbálgatással is megoldható, természetesen az ilyen megoldásokért is maximális pontszám jár.



5. Tamás 9 könyvet vásárolt, amelyeknek az ára csupa különböző 2-hatvány volt. A boltban olyan akció volt, hogy bármely 3 könyvből a legolcsóbbat ingyen kapta a vásárló. Hány különböző áron kaphatja meg Tamás a 9 könyvet? (A végösszeget ne kerekítsük.)

Megoldás

Bármilyen módon végzik is el a könyvek csoportosítását, a legolcsóbb könyvet ingyen kapja meg Tamás, míg a két legdrágábbat ki kell fizetnie. (1 pont)

Helyezzük el a könyveket egy sorban áraik szerint növekvő rendben, balról kezdve a legolcsóbbal. Jelöljük meg azokat a könyveket, melyeket Tamás ingyen kaphat. Az alábbiakban felsoroljuk a lehetséges eseteket (1 jelöli az ingyenes könyveket):

- 1aa1bb1cc
- 1a1abb1cc
- 11aabb1cc
- 1aa1b1bcc
- 1a1ab1bcc
- 11aab1bcc
- 1aa11bbcc
- 1a1a1bbcc
- 11aa1bbcc
- 1a11abbcc
- 11a1abbcc
- 111aabbcc

A kitöltés logikája: minden 1-estől jobbra legyen két nem ingyenes könyv, mely csakis hozzá tartozik, ezeket jelölik az a , b és c betűk. (1 pont)

Az előző felsorolásban nem szereplő esetből csak három van, és ezekben a legolcsóbb és a második legolcsóbb ingyenes könyv között legalább három nem ingyenes könyv van, ami lehetetlen. (2 pont)

Már csak azt kell megvizsgálni, hogy az ingyen kapott könyvek összára hány esetben különbözik. Mivel a legolcsóbb minden esetben ingyenes, így a másik kettő ára a lényeges, foglalkozzunk csak azokkal. Ha két olyan csoportosítást nézünk, melyben az egyik ingyenes könyv közös, akkor a másik ingyenes könyv nem az, így ekkor más-más árat jelent a két csoportosítás. (1 pont)

Ezek után tekintsünk két olyan csoportosítást, melyben a két-két ingyenes könyv más-más. Most használjuk ki azt, hogy a könyvek árai különböző 2-hatványok. Legyenek az egyik csoportosításban szereplő ingyenes könyvek árai $2^x, 2^y$, a másikban pedig $2^z, 2^u$. Tegyük fel, hogy közülük 2^u a legnagyobb. Ekkor:

$$2^u = 2^{u-1} + 2^{u-1} > 2^x + 2^y,$$



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014



felhasználva, hogy x és y különbözőek, és legfeljebb $u - 1$ -gyel egyenlők. Ez azt jelenti, hogy ekkor is különböző árat fizettünk a három-három könyvért. Beláttuk hát, hogy a felsorolt 12 csoportosítás mindegyikében más-más az ingyenes könyvek ára, vagyis a kifizetendő könyvek ára is egyben. (2 pont)

A válasz tehát: 12. (1 pont)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Annak igazolásánál, hogy különböző kiválasztásoknál más és más árat fizetünk a kilenc könyvért, arra is lehet hivatkozni, hogy a kettes számrendszerben más és más módon felírt számok értéke más és más lesz.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Juhász Péter, Steller Gábor.

Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TV-16-0077. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.