

46. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2. nap

HETEDIK OSZTÁLY

1. Egy pozitív prímszámokból álló, növekedő sorozatban az egymást követő tagok különbsége 12. Melyik a leghosszabb ilyen sorozat?

1. megoldás

Mivel 12-vel növelünk, ezért minden lépésben 2-vel növekszik az egyesek helyén álló számjegy. Ha páros számmal kezdődik a sorozat, akkor csak egy elemű lehet, mert a 2 az egyetlen páros prím. Az utolsó számjegyek tehát az $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ halmazból kerülnek ki. Ráadásul valahonnan kezdve, ebben a sorrendben fogják egymást ciklikusan követni.

Ha egy sorozat legalább 5 elemből áll, akkor szerepel benne az 5, mint utolsó számjegy. Ekkor a szám maga is csak 5 lehet, mert az az egyetlen 5-re végződő prím. Az 5 viszont csak az első elem lehet, hiszen a pozitívak a sorozat elemei és 12-vel növekszik. A leghosszabb sorozat tehát: 5, 17, 29, 41, 53.

2. megoldás

Tegyük fel, hogy a sorozat legalább 5 tagból áll. Vegyük észre, hogy a p , $p + 12$, $p + 24$, $p + 36$ és $p + 48$ számok mind különböző maradékot adnak 5-tel osztva, mert a lehetséges különbségeik 12, 24, 36 vagy 48 nem oszthatók 5-tel. Mivel 5-ös maradékból 5-féle van, az egyikük osztható 5-tel. Ez csak $p = 5$ lehet, mert pozitív prímekről van szó.

Tehát a legalább 5 tagból álló sorozatnak így kell kezdődnie: 5, 17, 29, 41, 53, ami mind prím, tehát 5 tagja lehet a sorozatnak. 6 tagja viszont nem lehet, mert a következő szám, a 65 nem prímszám.

2. Az ABC szabályos háromszög BC oldalának belső pontja X , CA oldalának belső pontja Y , AB oldalának belső pontja Z . Hány darab egyenlő szárú háromszög lehet az AYZ , BXZ , CXY , XYZ háromszögek között? Az összes lehetőségre mutass példát.

Megoldás

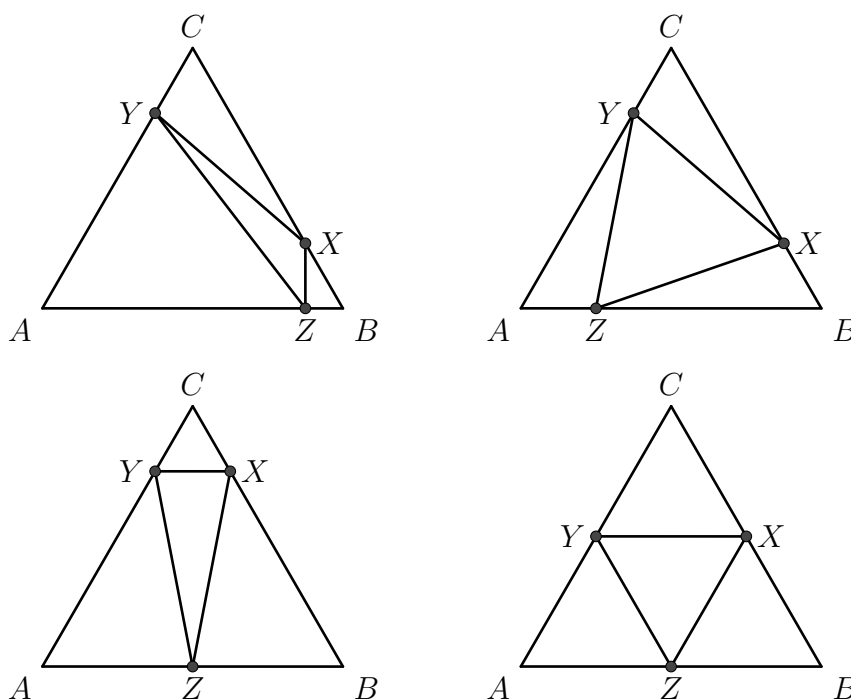
Az AYZ , BXZ , CXY háromszögeknek van 60° -os szöge, így ezek akkor és csak akkor egyenlő szárúak, ha szabályosak is.

0 egyenlő szárú háromszöget kapunk, ha például X a B -hez legközelebbi, Y a C -hez legközelebbi negyedelőpont, Z pedig a B -hez legközelebbi nyolcadolópont. Ellenőrizhető, hogy az XYZ háromszög oldalai páronként különböző hosszúságúak, és nem párhuzamosak ABC oldalaival.

1 egyenlő szárú háromszöget kapunk, ha például X a B -hez, Y a C -hez, Z az A -hoz legközelebbi negyedelőpont a megfelelő oldalon. Ekkor az XYZ háromszög a szimmetria miatt szabályos, így egyenlő szárú, míg a másik három nem lehet szabályos, tehát egyenlő szárú sem.

2 egyenlő szárú háromszöget kapunk, ha például X és Y a C -hez legközelebbi negyedelőpont a megfelelő oldalon, Z pedig az AB felezőpontja. A szimmetria miatt XYZ és CXY egyenlő szárúak, a másik két háromszög viszont nem lehet szabályos, tehát egyenlő szárú sem.

4 egyenlő szárú háromszöget kapunk, ha X , Y és Z rendre a megfelelő oldalak felezőpontjai, ekkor mind a 4 háromszög szabályos is.



Pontosan 3 egyenlő szárú háromszöget nem kaphatunk. Ha létezne a pontoknak ilyen megválasztása, akkor az AYZ , BXZ , CXY háromszögek között lenne legalább két egyenlő szárú, amelyek így szabályosak is lennének. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy ezek BXZ és CXY . Ekkor az $AZXY$ négyszög paralelogramma, amelyet az YZ átlója oszt fel az AYZ és XYZ háromszögekre. Ezek tehát egymás középpontos tükörképei, így vagy mindkettő egyenlő szárú, vagy egyik sem. Tehát 2 vagy 4 egyenlő szárú háromszögünk van, ami ellentmondás.

3. Két játékos, A (aki a játékot kezdi) és B a következő játékot játsszák: felváltva törölnek egy-egy számjegyet a 876543210 számból, amíg csak egyetlen jegy marad. Ha a nyolc törlés bármelyike után a számjegyeket összeolvasva a szám osztható négygel, B nyeri a játékot, egyébként pedig

A. Van-e valamelyik játékosnak nyerő stratégiája? Ha van, adj is meg egy nyerő stratégiát. (Ha a játék végén 0 marad, akkor B nyert, hiszen 0 osztható 4-gyel.)

1. megoldás

Megmutatjuk, hogy B -nek van nyerő stratégiája.

Ha A az első lépésben 2-nél nagyobb számot töröl, akkor B az 1-es törlésével eléri, hogy a szám 20-ra végződjön. Ha A az első lépésben 2-nél kisebbet töröl, akkor B a másik 2-nél kisebb jegy törlésével eléri, hogy a szám 32-re végződjön. Mindkét esetben B nyert.

Marad az az eset, hogy A elsőre a 2-est törli. Ekkor törölje B az 1-est, a megmaradó szám így 8765430.

Ha A most a 3-ast törli, B azonnal nyer. Ha 4-nél nagyobb számot töröl, akkor B a 3-as törlésével eléri, hogy a szám 40-re végződjön, ekkor is B nyer.

Tehát A csak a 4-est vagy 0-t törölheti. Törölje ekkor B a 3-ast, így a megmaradó szám $\overline{8765N}$, ahol $N = 0$ vagy $N = 4$.

Ha A 6-nál nagyobb számot töröl, akkor B az 5-ös törlésével eléri, hogy a végződés $\overline{6N}$ legyen, ami 4-gyel osztható. Ha A az 5-öst törli, a végződés $\overline{6N}$, ekkor is B nyer. Ha A a 4-est törli, akkor B az 5-ös törlésével eléri, hogy 76 legyen a végződés, ekkor is ő nyer.

Marad az az eset, hogy A a 6-ost törli, ekkor törölje B az 5-öst, megmarad $\overline{87N}$.

Ekkor bármit is lép A , az utolsó lépésben B meg tudja hagyni 8 és N közül valamelyiket, és mivel ez mindenképpen 4-gyel osztható szám, megnyeri a játékot.

2. megoldás

B számára egy lehetséges nyerő stratégia a következő: törölje sorra az 1, 3, 5, 7 számjegyeket. Ha ezek közül valamelyik már korábban törlődött, akkor helyette B tetszőleges másik jegyet törölhet. Megmutatjuk, hogy ilyen lépésekkel a játék során valamikor biztosan 4-gyel osztható számot kapunk.

Ha A az első lépésben 2-nél nagyobb számot vagy 0-át törölt, akkor az 1-es törlése után a kapott szám 20-ra vagy 32-re végződik, tehát 4-gyel osztható. Ha A az 1-est törli, azonnal 4-gyel osztható számot kapunk. Marad az az eset, hogy A elsőként a 2-es jegyet törölte.

Három lépéspár után a megmaradó 3 jegy ekkor csak a 8, 7, 6, 4, 0 számok közül kerülhet ki. Ha a 7 és a 6 is megmaradt, akkor B nyert, hiszen a 876, 764, 760 számok mindegyike osztható 4-gyel. Ha a 7 már törlődött, akkor a szám végződése 64, 60 vagy 40, ekkor is 4-gyel osztható számot kaptunk. Ha a 7-es megmaradt, de a 6-os nem, akkor az utolsó lépéspár után csak a 8, 4, 0 számok valamelyike maradhat meg, ezek viszont 4-gyel oszthatók. Így B minden esetben megnyerte a játékot.

4. Egy 7 fős rablóbanda rabolt egy zsák aranyat. Szétrakták az asztalon, majd így osztottak: először egyikük megsámolta az aranyakat, majd elvett annyit, amennyi e szám a számjegyeinek összege.

Ezután a jobb oldali szomszédja a maradékot számolta meg, s elvett annyi aranyat, amennyi e szám jegyeinek összege, s így folytatták tovább. Azt tapasztalták, hogy épp akkor fogyott el, mikor mindenki ugyanannyiszor vett már, sőt, mindenkinek ugyanannyi arany jutott a vezért kivéve. Őhöz több arany került. Tudjuk még, hogy 200-nál nem fér több arany egy zsákba. Hány arany lehetett kezdetben, és hányadikként vett a rablóvezér?

Megoldás

Egy szám 9-es maradéka megegyezik számjegyei összegének 9-es maradékával. Ez azt jelenti, hogy az első kivétel után 9-cel osztható lesz a zsákban lévő aranyak száma, és ez a tulajdonság a későbbiekben is megmarad. A 200-nál nem nagyobb 9-cel osztható számok között az alábbi átmenetek lehetségesek, ha a számjegyek összegével csökkentünk:

198	→	180	→	171	→	162	→	153	→	144	→	135	→	126	→	117
				↑												↓
				189												108
																↓
18	←	27	←	36	←	45	←	54	←	63	←	72	←	81	←	99
↓														↑		
9	→	0												90		

Mivel mind a 7 rabló ugyanannyiszor vett, ezért a kivételek száma 7-tel osztható, azaz az 1. kivétel után kapott szám csak olyan (9-cel osztható) szám lehet, ahonnan 7-tel osztva 6 maradékot adó számú lépésben jutunk el a 0-hoz. A fenti ábráról leolvasható, hogy a 198, 126, 54 értékek jöhetnek szóba. 198 arany csak úgy maradhat 1 lépés után, ha 200 aranyról indulunk. Ekkor az első rabló $2 + 9 + 9 = 20$ aranyat, a második rabló $18 + 9 + 9 = 36$ aranyat, a harmadik rabló $9 + 9 + 9 = 27$ aranyat kapna. Így nem teljesülne, hogy a vezért kivéve mindenki ugyanannyit kap, ez az eset tehát nem ad megoldást.

Ha az első lépés után 126 arany maradt, akkor a továbbiakban mindig 9 aranyat vesznek ki, kivéve az 5. rablót, aki az első kivételénél 18 aranyat kap. Ekkor tehát a 2., 3., 4., 6. és 7. rabló 18 aranyat kap összesen, az 5. rabló 27-et. Csak akkor teljesülnek a feltételek, ha az 1. rabló is 18 aranyat kap összesen, azaz kezdetben **135 arany** volt, és a vezér **5.** volt a sorban.

Ha az első lépés után 54 arany maradt, akkor innentől mindenki csak egyszer vesz el 9 aranyat. A vezér tehát csak az **1.** rabló lehet, és mivel neki többet kell vennie, az aranyak száma kezdetben **64, 65, 66, 67, 68 vagy 69** lehet. Más megoldás nem lehetséges.