

46. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 1. nap

HETEDIK OSZTÁLY

1. Előállítható-e a 22222244444 szám öt egymást követő egész szám szorzataként?

1. megoldás

Öt egymást követő szám közül mindig van (pontosan) egy, amelyik osztható 5-tel. Az öt szám szorzata ennek többszöröse, így maga is osztható 5-tel. Egy szám pontosan akkor osztható 5-tel, ha az utolsó jegye osztható 5-tel. Mivel a 4 nem osztható 5-tel, így a 22222244444 sem. Mivel öt egymást követő egész szám szorzataként csak 5-tel osztható számok állíthatóak elő, a kérdéses előállítás nem létezik.

2. megoldás

Az előző megoldáshoz hasonló gondolatmenet a 3-mal való oszthatóságra is alkalmazható: öt egymást követő szám között mindig van hárommal osztható is, így a szorzat is osztható 3-mal. Azonban a 22222244444 nem osztható 3-mal, mivel számjegyeinek összege (32) nem osztható 3-mal. Így az előállítás nem lehetséges.

2. Van egy négy számból álló halmazunk. Minden lépésben egy új négyelemű halmazt készítünk úgy, hogy az összes lehetséges módon elkészítjük a meglévő halmazból három szám összegét. Három lépés után a $\{63, 68, 69, 70\}$ halmazt kaptuk. Mi volt az eredeti négy szám?

1. megoldás

Minden lépésben az adott halmaz minden elemét 3 új elem létrehozásakor használunk fel. Emiatt minden lépésben a halmazban lévő számok összege 3-szorosa a megelőző halmazban lévő számok összegének. A végén az összeg $63 + 68 + 69 + 70 = 270$. Emiatt egy lépéssel korábban az összeg 90, azt megelőzően 30, és a kiinduló halmazban pedig 10.

Egy lépésben keletkező új számok olyanok, hogy egy régi elemmel kisebbek az előző 4 szám összegénél. Így ha a végén a legkisebb számnál 5-tel, 6-tal illetve 7-tel nagyobb a többi, akkor az előző lépésben a legnagyobb nál 5-tel, 6-tal, 7-tel kisebb volt a többi, még eggyel korábban ismét ennyivel nagyobbak, mint a legkisebb, és a kiinduláskor pedig ennyivel kisebbek, mint a legnagyobb.

Keresünk tehát négy egész számot, amiknek az összege 10, és a legnagyobb nál 5-tel, 6-tal, illetve 7-tel kisebb a másik 3. Ilyen számnégyes csak a 0, 1, 2, 7.

2. megoldás

Minden lépésben az adott halmaz minden elemét 3 új elem létrehozásakor használunk fel. Emiatt

minden lépésben a halmazban lévő számok összege 3-szorosa a megelőző halmazban lévő számok összegének. A végén az összeg $63+68+69+70 = 270$. Emiatt egy lépéssel korábban az összegnek 90-nek kellett lennie. Ebben az utolsó lépés előtti halmazban a három legnagyobb szám összege 70, ezt a 90-ből kivonva megkapjuk, hogy ekkor a legkisebb szám a 20 volt.

Ugyanígy a többi elem is meghatározható: $90 - 69 = 21$, $90 - 68 = 22$ és $90 - 63 = 27$. Hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy még egy lépéssel korábban 30 volt az összeg, a számok pedig 3, 8, 9 és 10. Ugyanígy adódik, hogy az első lépést megelőzően 10 volt az összeg, az eredeti négy szám pedig 0, 1, 2 és 7.

3. megoldás

Legyen az eredeti halmaz $\{a; b; c; d\}$, ahol $a < b < c < d$. (Ez utóbbi feltételezhető, mert egy halmaz elemei különböznek.) A három lépés így módosítja az elemeket:

$$\begin{aligned} \{a; b; c; d\} &\rightarrow \\ \{a+b+c; \quad a+b+d; \quad a+c+d; \quad b+c+d\} &\rightarrow \\ \{3a+2b+2c+2d; \quad 2a+3b+2c+2d; \quad 2a+2b+3c+2d; \quad 2a+2b+2c+3d\} &\rightarrow \\ \{7a+7b+7c+6d; \quad 7a+7b+6c+7d; \quad 7a+6b+7c+7d; \quad 6a+7b+7c+7d\} \end{aligned}$$

Az eredeti feltétel miatt a kapott négyesek is különböző számokból állnak. Ha az eredeti halmazban $S = a + b + c + d$ a számok összege, akkor a lépések után kapott halmazok elemeinek összege rendre $3S$, $9S$ és $27S$. Innen $27S = 63 + 68 + 69 + 70 = 270$, vagyis $S = 10$.

Az utolsó halmazban az elemek

$$\{7S - d; \quad 7S - c; \quad 7S - b; \quad 7S - a\},$$

ezek 70-nél éppen d -vel, c -vel, b -vel és a -val kisebbek és ez a halmaz megegyezik a $\{63; 68; 69; 70\}$ halmazzal. Innen az eredeti négy szám: $\{0; 1; 2; 7\}$.

3. $ABCDEF$ egy szabályos hatszög, melynek területe 1 területegység. (Az ábécé szomszédos betűi a hatszög szomszédos csúcsait jelölik.) X a CD oldal felezőpontja, Y pedig az EF oldalé. Mekkora az $ABCXYF$ hatszög területe? (A szabályos sokszögek minden oldala és szöge egyenlő.)

Megoldás

Jelölje a hatszög oldalának hosszát a . Tudjuk, hogy a hatszög hat darab szabályos háromszögből áll, így $FC = 2a$. Mivel YX az $FCDE$ trapéz középvonala, ezért $YX = \frac{2a+a}{2} = \frac{3}{2}a$. Ha m jelöli a szabályos háromszögek magasságát, akkor a feltétel értelmében

$$1 = 6 \cdot \frac{am}{2} \implies am = \frac{1}{3}.$$

Azt is tudjuk továbbá, hogy az $FCXY$ trapéz magassága $\frac{m}{2}$. Ezek után a kérdéses terület:

$$T(ABCXYF) = T(ABCF) + T(FCXY) = \frac{1}{2} + \frac{2a + \frac{3}{2}a}{2} \cdot \frac{m}{2} = \frac{1}{2} + \frac{7}{8}am = \frac{19}{24}.$$

4. Egy többjegyű pozitív egész számot különlegesnek nevezünk, ha nincs benne 0 számjegy, és bárhol kettévágva a kapott két szám közül az egyik osztja a másikat. Például az 1442 különleges, mert az 1 osztója a 442-nek, a 14 osztója a 42-nek, és a 144-nek osztója a 2. Hány különleges szám van 800 000 és 900 000 között?

Megoldás

Egy szám pontosan akkor osztható 8-cal, 4-gyel, illetve 2-vel, ha az utolsó három, kettő, illetve egyetlen számjegyéből alkotott szám osztható a szóban forgó számmal. Jelölje a kérdéses számot $\overline{8abcde}$.

Mivel $8 \mid \overline{abcde}$, ezért $8 \mid \overline{cde}$, $4 \mid \overline{de}$ és $2 \mid e$.

Mivel $e \mid \overline{8abcd}$, ezért $2 \mid d$, és mivel $4 \mid \overline{de} \mid \overline{8abc}$, ezért $4 \mid \overline{bc}$ és $2 \mid c$.

A $\overline{8ab}$ és $\overline{cde}$ számok közül valamelyik osztja a másikat, ám $\overline{8ab}$ önmagánál nagyobb többszöröse legalább négyjegyűek, így $\overline{cde} \mid \overline{8ab}$. Ezért $8 \mid \overline{cde} \mid \overline{8ab}$, amiből $8 \mid \overline{ab}$, így $2 \mid b$.

Mivel $2 \mid d$ és $4 \mid \overline{de}$, ezért $4 \mid e$. Ebből $4 \mid e \mid \overline{8abcd}$, így $4 \mid \overline{cd}$. Mivel $2 \mid c$, ebből $4 \mid d$ is következik.

Mivel $4 \mid \overline{bc}$ és $2 \mid b$, ezért $4 \mid c$.

Mivel $2 \mid c$ és $4 \mid d$, ezért $8 \mid \overline{cd0}$, így $8 \mid \overline{cde}$ -ből $8 \mid e$ is következik. Mivel a számban nincs 0 számjegy, ezért $e = 8$.

Így $e = 8 \mid \overline{8abcd}$ miatt $8 \mid \overline{bcd}$, és mivel $2 \mid b$ és $4 \mid c$, ezért $8 \mid \overline{bc0}$. Tehát $8 \mid d$, így mivel a szám nem tartalmaz nullát, $d = 8$.

Így $\overline{cde} = 488$ vagy $\overline{cde} = 888$, azonban előbbinek nincs $\overline{8ab}$ alakú többszöröse, utóbbiból pedig $\overline{8ab} = 888$ következik. Tehát 800 000 és 900 000 között egyetlen különleges szám van: a 888 888.

5. Beírtuk egy 6×6 -os táblázat mezőibe az egész számokat 1-től 36-ig úgy, hogy az egymást követő számok oldalszomszédos mezőkbe kerültek, de a 4 többszöröseit tartalmazó mezőknek nincs közös csúcsa.

(a) Mutasd meg, hogy ekkor a 36 csak valamelyik sarokmezőbe kerülhetett!

(b) Adj példát a feltételeknek megfelelő kitöltésre!

Megoldás

Osszuk fel a 6×6 -os táblázatot 9 darab 2×2 -es táblázatra. Egy ilyen 2×2 -es tartományban nem állhat egynél több 4-gyel osztható szám, hiszen ekkor a mezőknek lenne közös csúcsa. Mivel 9 darab 4-gyel osztható szám van, ezért a fentiek miatt minden 2×2 -es részbe pontosan egynek kell közülük kerülnie.

Színezzük ki a táblázatot sakktáblaszerűen. Látható, hogy ha egy mezőről mindig oldallal szomszédos mezőre lépve 4 lépésben eljutunk egy másik mezőre, akkor a két mező biztosan azonos

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
 Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
 E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
 Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
 Nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

színű. Ebből következik, hogy a 4-gyel osztható számokat tartalmazó mezők mind azonos színűek.

Vizsgáljuk a középső 2×2 -es részt. Forgassuk úgy a táblázatot, hogy az ebben a részben szereplő 4-gyel osztható szám ($4k$) a jobb alsó mezőbe kerüljön.

				X	Y
			$4k$	X	$4l$
		X	X	X	Y
		Y	$4m$	Y	$4n$

Ekkor az ábrán X -szel jelölt mezőbe a szomszédság miatt, az Y -nal jelölt mezőkbe a színezés miatt nem kerülhet 4-gyel osztható szám. Így a $4l$, $4m$, $4n$ jelzésű mezők biztosan 4-gyel osztható számokat tartalmaznak. Ekkor a $4n - 2$ és $4n + 2$ számok csak olyan mezőre kerülhetnek, amely 2 lépésben elérhető $4n$ -től, és nem 4-gyel osztható szám van rajta. Egyetlen ilyen mező van, ezért csak az egyik szám kerülhet beírásra, ami csak akkor teljesül, ha $4n = 36$. Tehát a 36 csak az egyik sarokmezőbe kerülhetett, hiszen a forgatás után a jobb alsó sarokban kell lennie.

Egy példa a megfelelő kitöltésre:

4	5	8	9	12	13
3	6	7	10	11	14
2	23	22	19	18	15
1	24	21	20	17	16
26	25	30	31	34	35
27	28	29	32	33	36

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Juhász Péter, Steller Gábor.

Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TV-16-0077. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.