



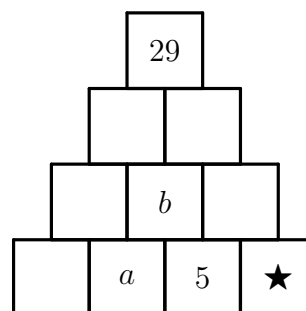
46. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló

HETEDIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

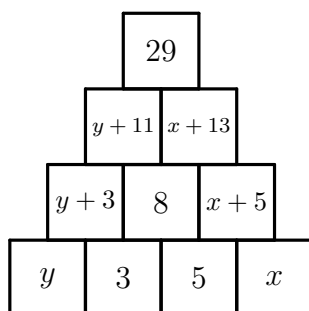
1. Az alábbi ábrán minden négyzetbe pozitív egész számokat írhatunk. Tudjuk, hogy bármely négyzetbe írt szám az alatta lévő két négyzetbe írt szám összege. Illetve azt is tudjuk, hogy $a + b = 11$. Add meg az összes számot, amely a ★-gal jelölt mezőbe kerülhet.



Megoldás

A képzési szabály alapján $a + 5 = b$, tehát $a + b = a + a + 5 = 11$, amiből $a = 3$ és $b = 8$. (2 pont)

A csillag helyére írt számot jelöljük x -szel, az a -tól balra lévőt y -nal és töltsük ki az üres mezőket az összeadási szabály szerint.



(2 pont)

Így a legfelső mezőre az $y + 11 + x + 13 = 29$ feltételt kapjuk, ahonnan $x + y = 5$. (1 pont)

Mivel pozitív egészekről van szó, x lehetséges értékei 1, 2, 3 és 4. Mindegyik megvalósítható az $y = 5 - x$ választással. (2 pont)

Összesen: 7 pont

2. Egy hatjegyű telefonszámot nevezzünk szerencsésnek, ha az első 3 jegyének összege egyenlő az utolsó három jegyének összegével, és szerencsétlennek, ha az előbbi feltétel nem teljesül.



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014



Növekvő sorrendben leírjuk a telefonszámokat. Ebben a sorban legfeljebb hány egymást követő szerencsétlen szám van? (Telefonszámon a 000000-tól 999999-ig terjedő számhatosokat értjük.)

Megoldás

1000 egymást követő szerencsétlen szám megadható, például:

000001, 000002, 000003, ..., 000999, 001000.

(2 pont)

A 000000, 001001, 002002, ..., 998998, 999999 sorozatban viszont minden szám szerencsés, hiszen az első 3 jegy megegyezik az utolsó hárommal.

(2 pont)

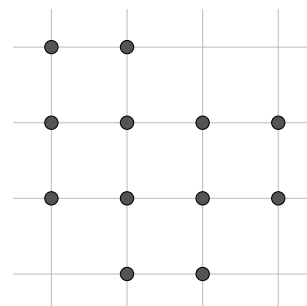
A fenti sorozatban minden 1001-edik telefonszám szerepel (éppen az 1001-gyel oszthatóak). Ezért bármely 1001 szomszédos telefonszám között van olyan, amelyik tagja a sorozatnak, tehát szerencsés. Így legfeljebb 1000 szomszédos szerencsétlen szám adható meg.

(3 pont)

Összesen: 7 pont

3. Egy négyzethálós lapon megjelöltünk 12 rácspontot az itt látható ábra szerint.

Szép négyszögnek nevezzük azokat a négyszöglapokat, amelyeknek mind a négy csúcsa a fenti 12 pont közül való, és területük megegyezik az egységoldalú négyzet területével. (Nem tekintjük négyszögnek azokat az alakzatokat, amelyeknek 3 csúcsa egy egyenesre illeszkedik.)



Anna egymás után, pirossal beszínezett az ábrán néhány szép négyszöget. Mindig olyat választott ki következőnek, amelynek pontjai a határvonalát kivéve még színezetlenek voltak. Amikor megunta a színezgetést, a 12 rácspont mindegyike legalább egy pirosra színezett szép négyszög csúcsa volt.

Hány szép négyszöget színezhetett be Anna? Adj példát minden lehetőségre és indokold, hogy miért nem lehet ezektől eltérő a beszínezett szép négyszögek száma!

Megoldás

Legalább 3 szép négyszöget be kellett színeznie, mert különben lenne olyan rácspont, amely nem lenne csúcsa egyik színezett négyszögnek sem.

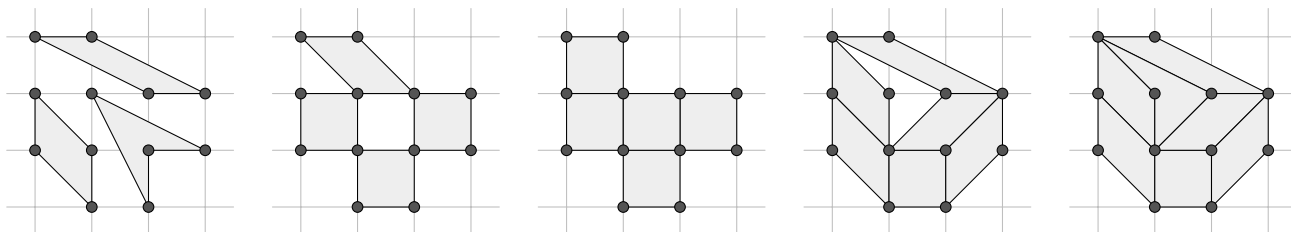
(1 pont)

Lehetséges, hogy a beszínezett szép négyszögek száma 3, 4, 5, 6 vagy 7 volt, ezekre 1-1 példát mutatnak az alábbi ábrák:



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014



(5 × 1 = 5 pont)

Az utolsó ábrán látható négyszögek egyesítésével kapott hétszög a 12 pont által meghatározott négyszögek mindegyikét lefedi. Mivel ennek a hétszögnek a területe $9 - 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 7$ egység, és Anna minden lépésben 1 egységnyi területet színez be, ezért nem színezhették be 7-nél több szép négyszöget.

(1 pont)

Összesen: 7 pont

4. A következő összeadásban minden betű egy számjegyet jelöl. Azonos betűk azonos számjegyeket, különböző betűk különböző számjegyeket.

$$\text{FOUR} + \text{FIVE} = \text{NINE}.$$

Hány különböző megoldás van? (Két megoldás különböző, ha van legalább egy olyan betű, amely eltérő számjegyet jelöl bennük.)

Megoldás

Az $R + E$ összeg E -re végződik, ezért $R = 0$. Emiatt a százasként az $O + I$ összeg már nem végződhet I -re, tehát itt van átvitel, és így az $O + I + 1$ összeg végződik I -re, amiből $O = 9$.

(1 pont)

A fentiek alapján az egyesek helyén nem keletkezett átvitel, a tízeseknél és a százasoknál viszont igen. Ezért $U + V = 10 + N$ és $F + F + 1 = N$.

(1 pont)

N tehát páratlan, ugyanakkor $N = F + F + 1 \geq 1 + 1 + 1 = 3$ és $N = U + V - 10 \leq 8 + 7 - 10 = 5$. Tehát $N = 3$ vagy $N = 5$.

(2 pont)

Ha $N = 3$, akkor $F = 1$ és $U + V = 13$. A fennmaradó számjegyek alapján az (U, V) párra 4 lehetőség van: $(8, 5)$, $(7, 6)$, $(6, 7)$, $(5, 8)$.

(1 pont)

Ha $N = 5$, akkor $F = 2$ és $U + V = 15$. A fennmaradó számjegyek alapján az (U, V) párra 2 lehetőség van: $(8, 7)$, $(7, 8)$.

(1 pont)

Ez összesen 6 lehetőség az R, O, N, F, U, V számjegyek megválasztására. Az (E, I) számpárt a még nem használt számjegyek közül szabadon választhatjuk. Így $6 \cdot 4 \cdot 3 = 72$ különböző megoldás van.

(1 pont)

Összesen: 7 pont

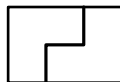


TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014



5. L-alakú, 3 négyzetből álló alakzatokkal kirakható legkisebb területű téglalap a 2×3 -as (ld. ábra). Mekkora a legkisebb **páratlan** területű téglalap, amely kirakható ilyen elemekkel? (A kirakás azt jelenti, hogy átfedés nélkül, hézagmentesen lefedjük a téglalapot.)



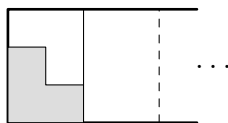
Megoldás

A terület csak úgy lehet páratlan, ha mindkét oldal hossza páratlan. (1 pont)

Minden L-alakzat 3 egységnyi területet fed le, így a téglalap területének 3-mal oszthatónak kell lennie. Ezért legalább az egyik oldalhossz 3-mal osztható. (1 pont)

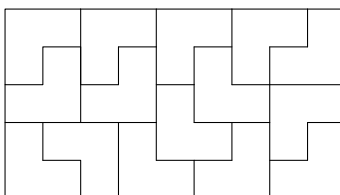
Egy 3 egység hosszúságú oldal mentén a két sarokmezőt különböző L-alakzatok tudják csak lefedni, de ezek csak úgy helyezhetők el, hogy egy 3×2 -es téglalapot alkotnak. (1 pont)

A fennmaradó téglalapra ezt a gondolatot megismételve újabb 3×2 -es téglalapot kapunk, és így tovább, míg végül az egész téglalapot lefedjük 3×2 -es téglalapokkal. Ez viszont csak akkor lenne lehetséges, ha az oldalhossza páros lenne. (1 pont)



Tehát a 3-mal osztható hosszúságú oldal hossza legalább 9 egység, míg a másik oldal hossza legalább 5 egység, így a terület legalább 45 egység. (1 pont)

Ez meg is valósítható az 5×9 -es téglalap kirakásával, például az alábbi módon:



(2 pont)

Összesen: 7 pont

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Juhász Péter, Steller Gábor.

Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TV-16-0077. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.