

46. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 2. nap

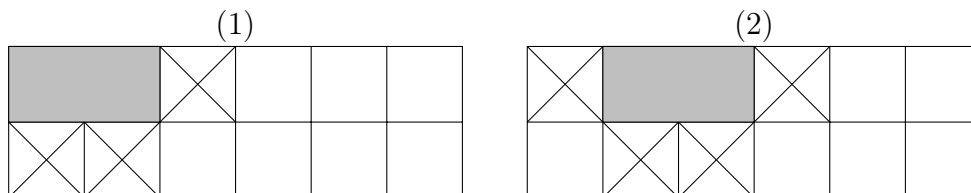
HATODIK OSZTÁLY

1. Gyula bácsi legkedvesebb galambjait egy 6×2 -es elrendezésű galambdúcbban őrzi. A legjobb tenyészpárjának tagjait, Királyt és Dámát egy szinten lévő, szomszédos dúcokban helyezte el. Sem alattuk, sem felettük, sem a szomszédos dúcokban nincs másik galamb. A legjobb madarát, Ászt, és a legígéretesebbet, Bubit egy-egy fennmaradó dúcba költöztette. Hányféle elrendezésben lakhatnak Gyula bácsi kedvenc madarai?



Megoldás

A Király és Dáma által elfoglalt dúcok elhelyezkedése szerint kétféle esetet különböztetünk meg: (1) az emelet „szélén” vannak; (2) az emelet „belsejében” vannak. Az ábrán X jelöli azokat a dúcokat, ahova nem kerülhet galamb.



Mindkét esetben kétféle módon lehet elhelyezni Királyt és Dámát a szürke téglalapon belül.

Az (1) esetben négy helyen lehet a szürke téglalap és a fennmaradó 7 dúcban $7 \cdot 6 = 42$ -féle módon lehet Ász és Bubi.

A (2) esetben hat helyen lehet a szürke téglalap és a fennmaradó 6 dúcban $6 \cdot 5 = 30$ -féle módon lehet Ász és Bubi.

Így összesen $2 \cdot (4 \cdot 42 + 6 \cdot 30) = 696$ lehetőség van.

2. Be lehet-e írni az alábbi számokat egy 3×3 -as táblázat mezőibe úgy, hogy minden sorban ugyanannyi legyen a számok összege, és minden oszlopban is ugyanannyi legyen a számok összege?

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
Nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

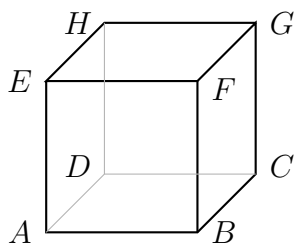
- (a) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9
- (b) 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4
- (c) 0, 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10, 11

Megoldás

- (a) Igen. Mivel a 9 szám összege 45, ezért soronként és oszloponként is 15 a számok összege. Egy lehetséges kitöltés:

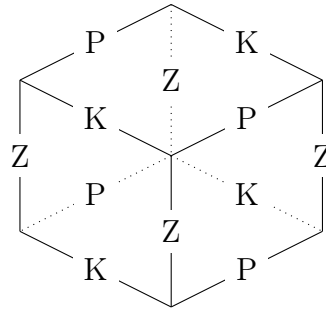
8	1	6
3	5	7
4	9	2

- (b) Nem. A számok összege 29, ami nem osztható hárommal, míg a három egyenlő sorösszeg összege csak hárommal osztható számot adhat.
 - (c) Nem. A számok összege 48, ezért az egyenlő sor- és oszlopösszegek értéke 16 lenne. Nézzük a 11 sorát és oszlopát egy feltételezett jó kitöltésben. Csak kétféle módon egészíthető ki 11 16-ra a megadott számokkal: $11 + 0 + 5$ és $11 + 1 + 4$. Most nézzük a 10 sorát és oszlopát (amik különböznek 11 sorától és oszlopától). A 10 mellé 6 összegű számpár kellene, de ilyet nem találunk a megmaradt számok között. A beírás tehát nem lehetséges.
3. Színezd meg egy kocka éleit úgy, hogy minden csúcspan az egy csúcspanba futó élek különböző színűek legyenek.
- (a) Legkevesebb hány színnel oldható meg ez a színezés?
 - (b) A legkevesebb színt használva hány különböző megoldás van, ha két megoldást különbözőnek tekintünk, ha van olyan él (pl. BF), amelynek színe a két megoldásban különböző?

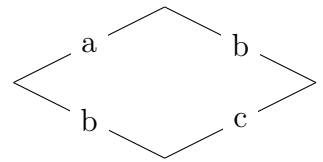
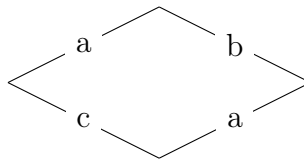
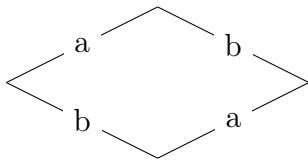


Megoldás

- (a) Három szín szükséges, hiszen egy csúcspanba három él fut be. Ennyi elegendő is:

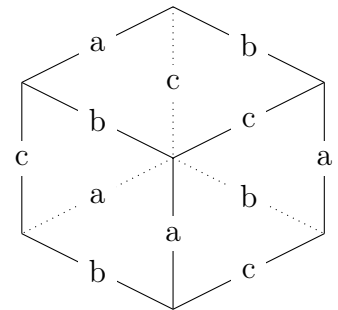
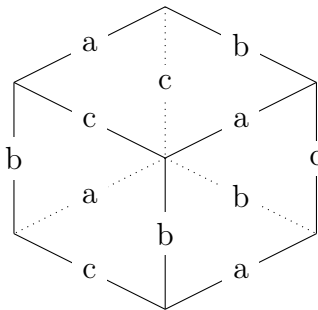


- (b) Rögzítsük az előző ábra felső csúcsából induló három él színét! Ezt 6 különböző módon tehetjük meg. Ha tehát rögzítjük ezt a három színt, akkor az így kapott jó színezések hatszorosa lesz a válasz. Most ágazzunk szét aszerint, hogyan néz ki a felső lap. Erre három lehetőség van.



Ha most a szabály betartásával szeretnénk befejezni a színezést, akkor az első esethez két befejezés tartozik: „lefelé” minden él c , az alsó lap pedig a fenti ábrának megfelelő, vagy annak 90° -os elforgatottja.

A másik két eset befejezése egyértelműen meghatározott:



Tehát összesen $6 \cdot (2 + 1 + 1) = 24$ a különböző színezések száma.

4. A sakktábla A1 mezőjéről sétálni indul egy vezér. Egy lépésben balra, jobbra, felfelé, lefelé vagy a 4 átlós irány bármelyikében léphet akármennyit. Csak olyan mezőre léphet, amelyen még előzőleg nem járt. Nem lehet két egyforma lépése, azaz amelyeknek az iránya és nagysága is megegyezik.
- (a) Lehetséges-e olyan séta, amelynek során a vezér a sakktábla első két sorának minden mezőjét bejárja, de más mezőre nem lép?
- (b) Lehetséges-e olyan séta, amelynek során a vezér a sakktábla minden mezőjét bejárja?

- (c) Lehetséges-e olyan séta, amelynek során a vezér nem lép a 8. sor és a H oszlop mezőire, minden más mezőre viszont igen?

Megjegyzés: egy 2×3 -as téglalap bejárható ily módon. Az alábbi ábra mutatja a bejárást. A mezőben álló szám jelzi, hogy hányadik lépésben lép a vezér arról a mezőről. Ha a fentiek közül valamelyik feladat megoldható, akkor a megoldást ilyen formában add meg:

2	6	2	4
1	1	5	3
	A	B	C

Megoldás

- (a) Igen, lehetséges. Az alábbi ábra mutat egy lehetséges bejárást.

2	16	14	12	10	9	11	13	15
1	1	3	5	7	8	6	4	2
	A	B	C	D	E	F	G	H

- (b) A vezérnek jobbra, balra, felfelé és lefelé is 7-féle lehetséges lépése van. Ugyanez a helyzet mind a négy átlós lépés esetén is. Összesen tehát $8 \cdot 7 = 56$ különböző lépése van a vezérnek. A teljes tábla bejárásához 63 lépésre van szükség, tehát nincs ilyen bejárás.
- (c) Most minden irányban 6-féle lépés lehetséges, vagyis összesen $8 \cdot 6 = 48$ féle. A bejáráshoz 48 lépésre van szükség (hiszen 49 mezőből áll a bejárando terület), így minden lehetséges lépést fel kellene használni. Ez azonban nem lehetséges, hiszen balra lefelé átlós irányban hetet lépni csak a G7 mezőről lehetséges, ekkor azonban visszalépnénk a kiindulási mezőre. Ilyen bejárás tehát szintén nem lehetséges.