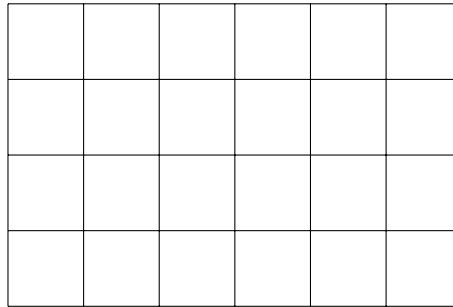


46. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY**Országos döntő – 1. nap****HATODIK OSZTÁLY**

1. Ossz fel egy 6×4 -es téglalapot a rácsvonalak mentén 3 részre úgy, hogy mindegyik rész

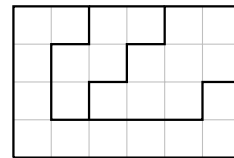
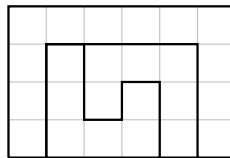
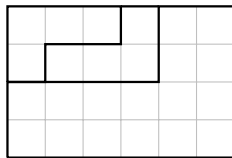
- (a) hatszög
- (b) nyolcszög
- (c) tízszög

legyen! Elég csak a felosztásokat megadni, nincs szükség indoklásra.

**Megoldás**

Minden esetben több megoldás is elképzelhető. Egy-egy példa:

- (a) Három hatszög: (b) Három nyolcszög: (c) Három tízszög:



2. Van egy 4 számból álló halmazunk. Minden lépésben egy új négyelemű halmazt gyártunk úgy, hogy elkészítjük bármely 3 szám összegét. Három ilyen lépés után a $\{63; 68; 69; 70\}$ halmazt kaptuk. Mi volt az eredeti négy szám?

1. megoldás

Minden lépésben az adott halmaz minden elemét 3 új elem létrehozásakor használunk fel. Emiatt

minden lépésben a halmazban lévő számok összege 3-szorosa a megelőző halmazban lévő számok összegének. A végén az összeg $63 + 68 + 69 + 70 = 270$. Emiatt egy lépéssel korábban az összeg 90, azt megelőzően 30, és a kiinduló halmazban pedig 10.

Egy lépésben keletkező új számok olyanok, hogy egy régi elemmel kisebbek az előző 4 szám összegénél. Így ha a végén a legkisebb számnál 5-tel, 6-tal illetve 7-tel nagyobb a többi, akkor az előző lépésben a legnagyobbnál 5-tel, 6-tal, 7-tel kisebb volt a többi, még egyvel korábban ismét ennyivel nagyobbak, mint a legkisebb, és a kiinduláskor pedig ennyivel kisebbek, mint a legnagyobb.

Keresünk tehát négy egész számot, amiknek az összege 10, és a legnagyobbnál 5-tel, 6-tal, illetve 7-tel kisebb a másik 3. Ilyen számnégyes csak a 0, 1, 2, 7.

2. megoldás

Minden lépésben az adott halmaz minden elemét 3 új elem létrehozásakor használunk fel. Emiatt minden lépésben a halmazban lévő számok összege 3-szorosa a megelőző halmazban lévő számok összegének. A végén az összeg $63 + 68 + 69 + 70 = 270$. Emiatt egy lépéssel korábban az összegnek 90-nek kellett lennie. Ebben az utolsó lépés előtti halmazban a három legnagyobb szám összege 70, ezt a 90-ből kivonva megkapjuk, hogy ekkor a legkisebb szám a 20 volt.

Ugyanígy a többi elem is meghatározható: $90 - 69 = 21$, $90 - 68 = 22$ és $90 - 63 = 27$. Hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy még egy lépéssel korábban 30 volt az összeg, a számok pedig 3, 8, 9 és 10. Ugyanígy adódik, hogy az első lépést megelőzően 10 volt az összeg, az eredeti négy szám pedig 0, 1, 2 és 7.

3. megoldás

Legyen az eredeti halmaz $\{a; b; c; d\}$, ahol $a < b < c < d$. (Ez utóbbi feltételezhető, mert egy halmaz elemei különböznek.) A három lépés így módosítja az elemeket:

$$\begin{aligned} \{a; b; c; d\} &\rightarrow \\ \{a + b + c; &a + b + d; \quad a + c + d; \quad b + c + d\} \rightarrow \\ \{3a + 2b + 2c + 2d; &2a + 3b + 2c + 2d; \quad 2a + 2b + 3c + 2d; \quad 2a + 2b + 2c + 3d\} \rightarrow \\ \{7a + 7b + 7c + 6d; &7a + 7b + 6c + 7d; \quad 7a + 6b + 7c + 7d; \quad 6a + 7b + 7c + 7d\} \end{aligned}$$

Az eredeti feltétel miatt a kapott négyesek is különböző számokból állnak. Ha az eredeti halmazban $S = a + b + c + d$ a számok összege, akkor a lépések után kapott halmazok elemeinek összege rendre $3S$, $9S$ és $27S$. Innen $27S = 63 + 68 + 69 + 70 = 270$, vagyis $S = 10$.

Az utolsó halmazban az elemek

$$\{7S - d; \quad 7S - c; \quad 7S - b; \quad 7S - a\},$$

ezek 70-nél éppen d -vel, c -vel, b -vel és a -val kisebbek és ez a halmaz megegyezik a $\{63; 68; 69; 70\}$ halmazzal. Innen az eredeti négy szám: $\{0; 1; 2; 7\}$.

3. Meg lehet-e adni 50 egész számot úgy, hogy az összegük egy 10-nél nagyobb prímszám, a szorzatuk pedig egy ennél 1-gyel kisebb négyzetszám legyen?

Megoldás

17 egy olyan prímszám, aminél az eggyel kisebb szám négyzetszám. Próbáljunk meg megadni számokat úgy, hogy összegük 17 legyen, szorzatuk pedig 16.

Legyen az egyik szám 16, az összes többi, pedig vagy 1 vagy -1 . Ekkor páros sok -1 -re van szükségünk, hogy a szorzat 16 legyen és eggyel több 1-re, mint -1 -re, hogy az összegük 17 legyen. Ha tehát a számaink: 1 darab 16, 25 darab 1 és 24 darab -1 , akkor ezek a számok megfelelnek a feltételnek:

$$16 + 25 \cdot 1 + 24 \cdot (-1) = 17$$
$$16 \cdot 1^{25} \cdot (-1)^{24} = 16$$

Tehát a feltett kérdésre igen a válasz.

4. Egy többjegyű pozitív egész számot különlegesnek nevezünk, ha nincs benne 0 számjegy, és bárhol kettévágva a kapott számok közül az egyik osztója a másiknak. Az 1442 például különleges, mert az 1 osztója a 442-nek, a 14 osztója a 42-nek, valamint a 144-nek osztója a 2. Hány különleges szám van 500000 és 600000 között?

Megoldás

Mivel a 0 nem megengedett számjegy, a különleges számok alakja $\overline{5abcde}$, továbbá $5 \mid \overline{abcde}$ miatt $e = 5$. Mivel $e \mid \overline{5abcd}$ és $e = 5$, ezért $d = 5$. Tudjuk, hogy $\overline{5a} \mid \overline{bc55}$ és $\overline{55} \mid \overline{5abc}$. A második feltétel miatt c is 5. Most két háromjegyűre vágva a számot vagy $\overline{5ab} \mid \overline{555}$ vagy $\overline{555} \mid \overline{5ab}$ kell, hogy teljesüljön. Mivel mindkét szám 500-nál nagyobb, csak egyenlők lehetnek, mert már a kétszeresük is négyjegyű. Innen azt kaptuk, hogy $a = b = 5$. Az egyetlen különleges szám tehát a megadott intervallumban az 555555.

5. Aladár és Pisti kitalálós játékot játszanak egy 10×10 -es táblán. Pisti titokban kiválaszt és megjegyzi a tábláról 18 mezőt, ezeket kell Aladárnak kitalálnia. Aladár úgy kérdezhet, hogy bejelöl a táblán 18 mezőt. Ezekről Pisti megmondja, hogy közülük melyek szerepelnek az általa gondolt mezők között. Ezután Aladár újra 18 mező megjelölésével kérdezhet, amelyre Pisti megint válaszol, és így tovább. Mennyi az a legkevesebb kérdés, amelyet ügyesen feltéve Aladár szerencse nélkül is biztosan meghatározhat 9 mezőt a gondoltak közül?

Megoldás

Négy kérdés nem lehet elég, hiszen négy kérdésből legfeljebb $4 \cdot 18 = 72$ mezőre tud Aladár rákérdezni, és elképzelhető, hogy minden Pisti által megjelölt mező a maradék 28 között van. A 28 megmaradt mezőből bármelyik 9 lehet jelöletlen, ezért Aladár nem tudhatja biztosan 9 jelölt mező helyét.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
Nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

Öt kérdés elegendő. Aladár minden lépésben úgy jelöljön meg 18 mezőt, hogy ne legyen olyan mező, amit kétszer jelölt meg. Ekkor két lehetőség van:

1) Az $5 \cdot 18 = 90$ megkérdezett mező között volt 9 Pisti mezői közül és akkor Aladár tudja biztosan 9 megjelölt mező helyét.

2) Ha az öt kérdésben lefedett 90 mező legfeljebb 8-at tartalmaz Pisti mezői közül, akkor a maradék $100 - 90 = 10$ mező már mind megjelölt és ezek helyét Aladár ismeri, ezekre már nem kell rákérdeznie.

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Juhász Péter, Steller Gábor.

Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TV-16-0077. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.