



46. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló

HATODIK OSZTÁLY

JAVÍTÁSI ÚTMUTATÓ

1. Egy ötjegyű számot írásban megszoroztunk egy kétjegyűvel, a szorzat hatjegyű lett. Sajnos a számjegyek nagy része elmosódott, ezeket $\star$ jelöli. Állítsd helyre a szorzást!

$$\begin{array}{r} \star \ 3 \ 0 \ 7 \ 4 \cdot \star \star \\ \star \star \ 5 \ 1 \ 8 \\ \star \ 5 \star \star \star \\ \hline \star \star \star \star \star \star \end{array}$$

Megoldás

$$\begin{array}{r} 1 \ 3 \ 0 \ 7 \ 4 \cdot 7 \ 5 \\ 9 \ 1 \ 5 \ 1 \ 8 \\ 6 \ 5 \ 3 \ 7 \ 0 \\ \hline 9 \ 8 \ 0 \ 5 \ 5 \ 0 \end{array}$$

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: Ha a megoldás nem tökéletes, akkor az alábbi részpontszámok adhatók:

- Ha a szorzóban az első számjegy 7. (1 pont)
Ha a szorzandó 13074. (1 pont)
Ha az első részletszorzat 91518. (1 pont)
Ha a szorzóban a második számjegy 5. (2 pont)
Ha a második részletszorzat 65370. (1 pont)
Ha a szorzat 980550. (1 pont)

Részletes indoklás, amit a feladat szövege nem kért:

A kétjegyű szám első számjegye csak 7 lehet, hiszen a 4 egyjegyű számú többszörösei közül csak a 8 és a 28 végződik 8-ra, viszont látszik, hogy 2 nem lehet az első számjegy, mert akkor nem lenne tízes átvitel és a 7 alatt 4-nek kellene állnia. Ebből az is következik, hogy a második sor második helyén 1 áll.

Ugyanezt úgy is be lehet látni, hogy mivel az ötjegyű szám harmadik jegye 0, ezért a kétjegyű szám első jegye $518 : 74 = 7$.



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014



$$\begin{array}{r} \star \quad 3 \quad 0 \quad 7 \quad 4 \quad \cdot \quad 7 \quad \star \\ \hline \star \quad 1 \quad 5 \quad 1 \quad 8 \\ \hline \star \quad 5 \quad \star \quad \star \quad \star \\ \hline \star \quad \star \quad \star \quad \star \quad \star \end{array}$$

A harmadik sorban szereplő 5 csak úgy jöhet ki, ha a kétjegyű szám második jegye 5. Hiszen az 5-öt úgy kapjuk, hogy a kétjegyű szám második jegyét megszorozzuk 3-mal, és hozzáadjuk az előző lépésből kapott maradékot. De maradék nincs, hiszen az előző lépésben 0-t szoroztunk valamivel. A 3 egyjegyű számú többszörösei között pedig a 15 az egyetlen, ami 5-re végződik. Ezek alapján a szorzás eddig megfejtendő:

$$\begin{array}{r} \star \quad 3 \quad 0 \quad 7 \quad 4 \quad \cdot \quad 7 \quad 5 \\ \hline \star \quad 1 \quad 5 \quad 1 \quad 8 \\ \hline \star \quad 5 \quad 3 \quad 7 \quad 0 \\ \hline \star \quad \star \quad 0 \quad 5 \quad 5 \quad 0 \end{array}$$

Az eredeti 5-jegyű szám első számjegye csak az 1-es lehet, hiszen egy 20 000-nél nagyobb szám 75-szöröse biztosan 6-jegyű, márpedig a második sorban egy ötjegyű szám látható. Tehát az összeszorozott számok: 13074 és 75.

2. Tamás 7 könyvet vásárolt, amelyeknek az ára 500, 700, 1000, 1400, 2000, 2200 és 4000 Ft volt. A boltban olyan akció volt, hogy 3 könyvből a legolcsóbbat ingyen kapta a vásárló. A bolt a számára legkedvezőbb módon csoportosította a könyveket, azaz ahogy Tamás a legtöbbet fizetné. Tamás azonban reklamált és a számára legkedvezőbb módon csoportosított, vagyis ahogy a legkevesebbet kell fizetnie. Mennyit spórolt Tamás a reklamációval?

Megoldás

Mivel 7 könyv van, ezért két hármas csoport állítható össze, vagyis két könyvet fog Tamás ingyen megkapni. A bolt akkor jár jól, ha minél olcsóbb könyveket ad ingyen, Tamás pedig akkor, ha minél drágábbakat. (1 pont)

A bolt el tudja érni, hogy a két legolcsóbb könyv legyen ingyen, hiszen az egyik csoportba teszi a 4000, 2200 és 500 Ft-os könyvet, a másikba pedig a 2000, 1400 és a 700 Ft-osat. Ekkor az 500 és a 700 Ft-os könyvet kapja Tamás ingyen. (1 pont)

Tehát a kifizetett összeg ekkor: $4000 + 2200 + 2000 + 1400 + 1000 = 10600$ forint. (1 pont)

Tamás minél drágább könyveket szeretne ingyen megkapni.

A két legdrágább könyvet mindenképpen ki kell fizetnie, hiszen nincs olyan hármas csoport, amelyben ezek egyike lenne a legolcsóbb. (1 pont)

Az olcsóbb ingyen kapott könyv ára legfeljebb a hatodik legnagyobb összeg lehet, hiszen a 4 kifizetett összegnek és a drágább ingyenesnek is több az ára. (1 pont)

A legkedvezőbb esetben tehát a harmadik és hatodik legdrágább könyv szerezhető meg ingyen.



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014



A kifizetett összeg ekkor: $4000 + 2200 + 1400 + 1000 + 500 = 9100$ forint. (1 pont)

Vagyis Tamás $10600 - 9100 = 1500$ forintot tudott spórolni a reklamációval. (1 pont)

Összesen: 7 pont



3. Anna, Béla, Cili, Dénes, Edina, Feri és Gábor baráti összejövetelt szerveznek telefonbeszélgetések útján. Ha közülük ketten már beszéltek az ügyben, akkor többé nem hívják egymást. Anna és Béla eddig 6-6 beszélgetést folytatott le. Cili és Dénes beszélgetéseinek száma különböző páratlan szám. Összesen 14 beszélgetés zajlott le.

- (a) Beszélt-e egymással Cili és Dénes?
(b) Van-e a hét résztvevő között olyan, akinek csak 2 beszélgetése volt?

1. megoldás

Jelöljük A, B, C, D, E, F és G -vel az ilyen kezdőbetűjű emberek beszélgetéseinek a számát.

Mivel összesen 14 beszélgetés zajlott le, és egy beszélgetés pontosan két ember között zajlik, ezért $A + B + C + D + E + F + G = 28$. (1 pont)

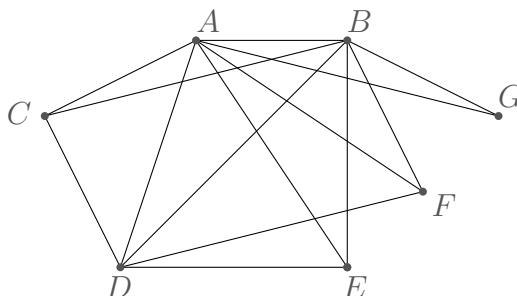
Mivel $A = 6, B = 6$, azaz ők mindenkivel beszéltek, ezért $C, D, E, F, G \geq 2$. (1 pont)

C és D különböző páratlan számok. Mivel C és D különböző páratlan számok, mindkettő értéke legalább 2 és legfeljebb 6, ezért C és D értéke valamilyen sorrendben 3 és 5. (2 pont)

Tudjuk, hogy $A + B + C + D = 20$, tehát $E + F + G = 8$. A 8 kétféle módon jöhet ki 3 megfelelő egész szám összegeként: $2 + 2 + 4$ vagy $2 + 3 + 3$. Tehát biztosan van olyan ember, akinek csak 2 beszélgetése volt. (1 pont)

Mindkét esetben legalább egy ember E, F, G közül nem beszélt senkivel A -n és B -n kívül, ezért csak úgy lehet meg az 5 beszélgetése C -nek vagy D -nek, ha egymással is beszéltek. (1 pont)

Az $(A, B, C, D, E, F, G) = (6, 6, 3, 5, 3, 3, 2)$ megvalósítható:



(1 pont)

Összesen: 7 pont

2. megoldás

Jelöljük az embereket a nevük kezdőbetűivel.

Mivel A és B beszélt mindenkivel, ezért tekintsünk el tőlük és az általuk lefolytatott beszélgetésektől. 11 ilyen beszélgetés volt, hiszen ők mindenki mással beszéltek, de egymással is. (2 pont)

Az összes beszélgetés darabszáma 14-ről így lecsökken 3-ra, a megmaradt személyek beszélgetéseinek száma pedig rendre 2-vel. (1 pont)



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014



C és D beszélgetéseinek a száma továbbra is páratlan marad, hiszen 2-vel csökkent, így csakis 1, illetve 3 lehet. (1 pont)

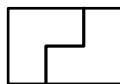
Ha C és D nem beszélt volna egymással, akkor ez 4 beszélgetést jelentene összesen, ami lehetetlen. Tehát C és D beszélt egymással. (1 pont)

Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy D beszélt 3 emberrel a megmaradók közül. Mivel C -vel beszélt, ezért E , F és G közül az egyikkel nem. Ez az ember nem beszélt egy emberrel sem a megmaradók közül, viszont beszélt A -val, illetve B -vel, így ő pontosan két emberrel beszélt. (1 pont)

Az 1. megoldás végén lévő ábra mutatja, hogy a fentiek meg is valósulhatnak. (1 pont)

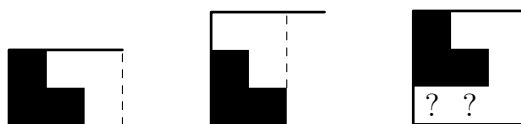
Összesen: 7 pont

4. L-alakú, 3 négyzetből álló alakzatokkal kirakható legkisebb területű téglalap a 2×3 -as (ld. ábra). Mekkora a legkisebb területű téglalap, amely úgy rakható ki ilyen elemekkel, hogy abban semelyik két szereplő elem sem alkot 2×3 -as téglalapot? (A kirakás azt jelenti, hogy átfedés nélkül, hézagmentesen lefedjük a téglalapot.)



Megoldás

A keletkező téglalap mindkét oldala legalább 4 egység hosszú, mert 2 és 3 egységnyi oldalakkal nem teljesíthető a feltétel.



(2 pont)

Az L-alakok három négyzetet fednek, ezért a keletkező téglalap területe osztható 3-mal.

(1 pont)

Emiatt legalább az egyik oldalának hossza is osztható 3-mal.

(1 pont)

A legkisebb lehetséges oldalpár ezért a 4 és 6.

(1 pont)

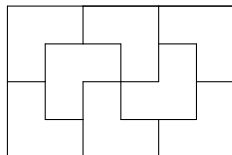


TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014



Ilyen oldalú téglalap készíthető is, tehát a minimális terület 24 egység.



(2 pont)

Összesen: 7 pont

5. Az ábrán látható 4×4 -es táblázatot kell kitöltenünk az 1, 2, 3, 4 számokkal. A szabályok a következők:

- (1) Egy adott szám minden sorban és minden oszlopban egyszer szerepel.
- (2) Ha két négyzet közös oldalán egy üres karika látható, akkor azokban a négyzetekben szomszédos számok szerepelnek.
- (3) Ha két négyzet közös oldalán egy teli karika látható, akkor azokban a négyzetekben két olyan szám szerepel, melyek közül az egyik duplája a másiknak.

- (a) Mutasd meg, hogy a B2-es mezőben csak 3-as szám állhat!
- (b) Add meg a táblázat egy olyan kitöltését, amely megfelel a fenti szabályoknak!

4		○	●	
3			●	
2			○	
1		●	○	
	A	B	C	D

Megoldás

Egy teli karika két oldalán lévő négyzetekben csak az (1;2), illetve a (2;4) párok szerepelhetnek valamilyen sorrendben. Vagyis egy teli karika melletti mezőn nem állhat 3-as. (1 pont)

A B oszlopban 3 ilyen mező van, és egy oszlopban minden szám különböző, tehát ezeken a mezőkön szükségképpen az 1, 2, és 4 számoknak kell állniuk. (1 pont)

Emiatt az egyetlen teli karikával nem szomszédos mezőn, B3-on csak 3-as állhat. (1 pont)



TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014



Az egyetlen jó kitöltés:

4	3	○	2	●	1	4
3	4		1	●	2	3
2	1		3	○	4	2
1	2	●	4	○	3	1
	A	B	C	D		

(4 pont)

Összesen: 7 pont

A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Juhász Péter, Steller Gábor.
Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TV-16-0077. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.