

46. TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Országos döntő – 1. nap

ÖTÖDIK OSZTÁLY

1. 4 testvér (akik között nincsenek ikrek) beszélget születésük sorrendjéről. Kettő közülük hazudik, kettő igazat mond.

András: Dávid a legfiatalabb.

Boldizsár: Dávid a legöregebb és Boldizsár a legfiatalabb.

Csilla: Én születtem legkésőbb.

Dávid: Sem legfiatalabb, sem legöregebb nem vagyok.

Melyik két testvér állítása igaz?

Megoldás

András, Boldizsár és Csilla közül akárhogy is választunk ki kettőt, azok ellentmondanak egymásnak. Ez azt jelenti, hogy Dávid igazat mond.

Mivel Dáviddal ellentétet állít mind András, mind pedig Boldizsár, így a másik, aki igazat mond, csakis Csilla lehet.

Ezek után egy lehetséges születési sorrend: András, Dávid, Boldizsár, Csilla. Látható, hogy ennek a sorrendnek pontosan Csilla és Dávid állítása felel meg.

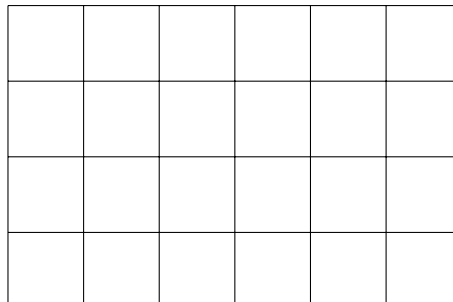
2. Ossz fel egy 6×4 -es téglalapot a rácsvonalak mentén 3 részre úgy, hogy mindegyik rész

(a) hatszög

(b) nyolcszög

(c) tízsög

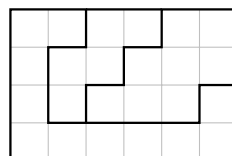
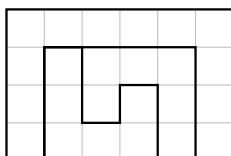
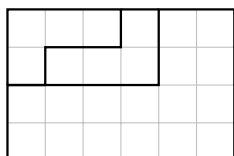
legyen! Elég csak a felosztásokat megadni, nincs szükség indoklásra.



Megoldás

Minden esetben több megoldás is elképzelhető. Egy-egy példa:

(a) Három hatszög: (b) Három nyolcszög: (c) Három tízszeres:



3. Aladár és Pisti kitalálós játékot játszanak egy 5×5 -ös táblán. Pisti titokban kiválaszt és megjelöl a tábláról 18 mezőt, ezeket kell Aladárnak kitalálnia. Aladár úgy kérdezhet, hogy bejelöl a táblán 18 mezőt. Ezekről Pisti megmondja, hogy közülük melyek szerepelnek az általa gondolt mezők között. Ezután Aladár újra 18 mező megjelölésével kérdezhet, amelyre Pisti megint válaszol, és így tovább. Mennyi az a legkevesebb kérdés, amelyet ügyesen feltéve Aladár szerencse nélkül is biztosan meghatározhat 12 mezőt a gondoltak közül?

Megoldás

Mivel Pisti 7 mezőt nem jelöl be ($25 - 18 = 7$), így Aladár legfeljebb 7 „rosszat”, ezt a 7-et színezheti be, vagyis az első kérdéssel legalább 11 mezőt eltalál. Ezen a 11 mezőn kívül 14 mező van még, amiből Aladár már tudja, hogy melyik az a legfeljebb 7 mező, amit Pisti nem jelölt be, s így azt is, hogy melyiket igen. Több kérdésre tehát nincs szüksége, a válasz: 1. Ha Aladár az első kérdésével 7-nél kevesebb „rosszat” talált el, akkor viszont legalább 12 „jót” jelölt, ekkor is elég 1 kérdés.

4. Adottak a következő törtek:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}.$$

Minden lépésben készíthetünk egy új számot úgy, hogy a következő két művelet valamelyikének végeredményével bővítjük az eddigi számok halmazát:

- egy meglévő számban felcseréljük a számlálót és a nevezőt;
- egy meglévő számot kivonunk 1-ből.

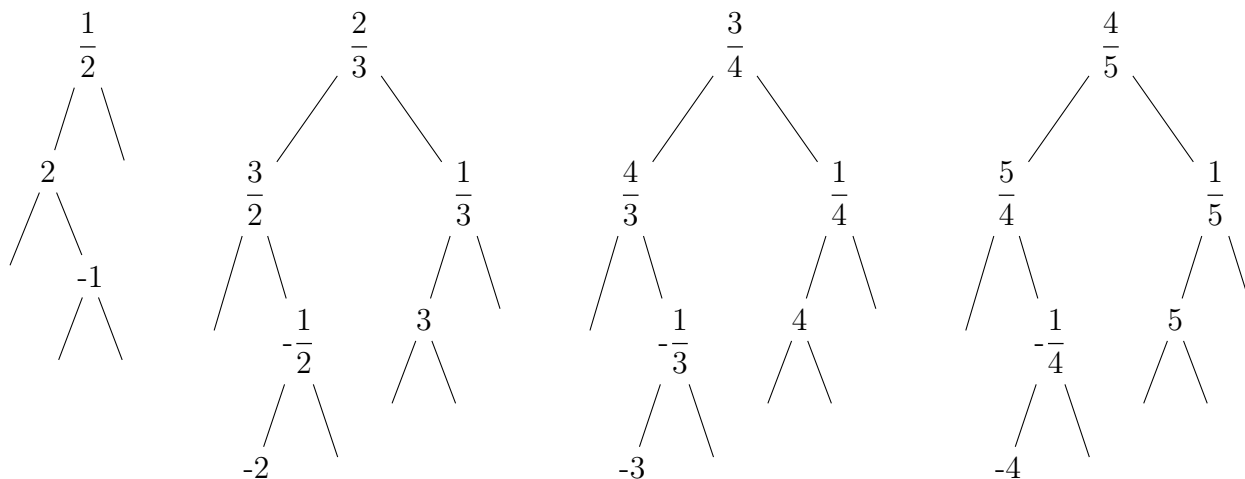
Hány számot kaphatunk így, ha akárhány lépést elvégezhetünk? (Az újonnan kapott számot a következő lépésben már felhasználhatjuk.)

(A törteknek minden esetben a legegyszerűbb alakját használd! Pl.: $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ és $\frac{3}{1} = 3$.)

Megoldás

Vegyük sorban az adott számokat, és szemléltessük a ábrán a kérdéses változtatásokat. A bal

oldali ágak mindig az első átalakítást jelentik, a jobb oldaliak pedig a másodikat. Ha már korábban szereplő számhoz jutunk, akkor ezt már nem szerepeltetjük újra, és itt a lépés-sorozat véget ér.



Az $\frac{1}{2}$ -ből nyerhető új számok: 2, -1.

A $\frac{2}{3}$ -ból nyerhető új számok: $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{2}$, 3, -2.

A $\frac{3}{4}$ -ból nyerhető új számok: $\frac{4}{3}$, $\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{3}$, 4, -3.

A $\frac{4}{5}$ -ből nyerhető új számok: $\frac{5}{4}$, $\frac{1}{5}$, $-\frac{1}{4}$, 5, -4.

Összesen 21 szám fog szerepelni a megadottakkal együtt.

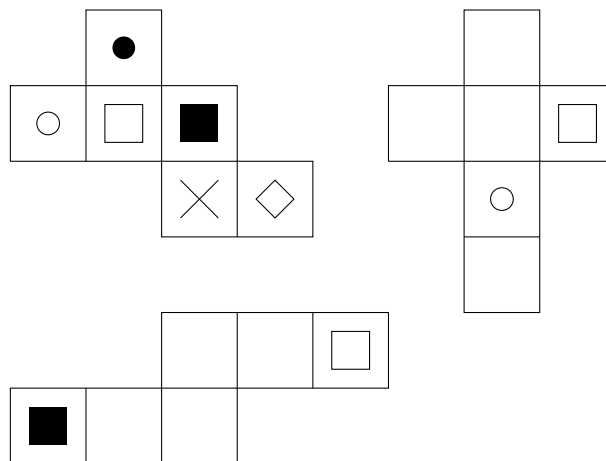
(Másik - nem ötödikestől elvárt - megoldás: ha egy $\frac{a}{b}$ törtből indulunk ki, ahol $a \neq b$, akkor belőle a következő számok érhetők el: $\frac{b}{a}$, $\frac{a-b}{a}$, $\frac{b-a}{b}$, $\frac{b}{b-a}$, $\frac{a}{a-b}$, melyek között lehetnek egyenlők. a és b helyére beírva az adott számokat, majd elhagyva a már korábban megjelenőket, kapjuk a megoldásokat.)

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

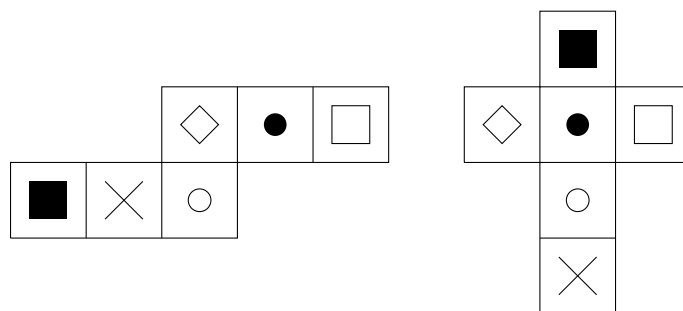
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
Nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

5. Egy papírból készült kocka lapjaira kívülről mintákat rajzoltunk. Ezután szétnyitottuk a kockát, kiterítettük, így az első ábrán látható hálót kaptuk. A másik két hálóból pontosan ugyanilyen kockát szeretnénk hajtogatni.

Rajzold be a hiányzó mintákat a megfelelő négyzetekbe! (A papír nem átlátszó, és a mintát csak az egyik oldalon rajzoljuk meg.) Elegendő megadni a helyes ábrát, nincs szükség indoklásra.



Megoldás



A feladatokat összeállította: Gyenes Zoltán, Jakucs Erika, Juhász Péter, Steller Gábor.
Lektorálta: Erben Péter, Győry Ákos.

Az NTP-TV-16-0077. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.