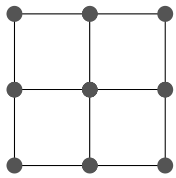
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

45. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló

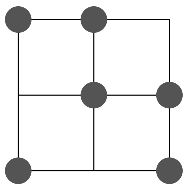
NYOLCADIK OSZTÁLY

1. Egy 2×2-es négyzetrács 3×3 rácspontja közül legfeljebb hányat színezhetünk pirosra, hogy ne legyen olyan téglalap, amelynek mind a négy csúcsa piros?



Megoldás

6 pontot ki lehet választani például az ábrán látható módon. (***3** pont*)



Ha ki lehetne választani 7 pontot, a skatulyaelv alapján az egyik sorból mindhárom pontot ki kéne választani. (***2** pont*)

Ezen kívül még kell lennie 4 pontnak, tehát a maradék két sorból az egyikben legalább két pontnak kell lennie. (***1** pont*)

Azonban ez a két pont és a három kiválasztott pontot tartalmazó sor azon két pontja, melyek egy oszlopban vannak ezzel a két ponttal, téglalapot alkotnak. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés

A konstrukciónál ellenőrizni kell azt is, hogy a négy oldalfelező pont ne legyen kiválasztva, hiszen azok négyzetet (és így téglalapot) alkotnak.

Az NTP-TV-15-0080. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

Nemzeti Tehetség Program
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Emberi Erőforrás Támogatáskezelő

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

2. Van rengeteg 1×1-es és rengeteg 9×9-es négyzetünk. Ki lehet-e választani közülük 2222 darabot úgy, hogy össze lehessen belőlük állítani egy nagyobb négyzetet?

1. Megoldás
Tegyük fel, hogy k darab 9×9-es és $2222-k$ darab 1×1-es négyzetet választottunk. Ekkor az összterületük $81k+(2222-k)=80k+2222$. (***2*** *pont*)
Mivel $80k$ osztható 10-zel, ezért $80k+2222$ utolsó számjegye 2. (***1*** *pont*)
Négyzetszám utolsó számjegye viszont nem lehet 2. (***2*** *pont*)
Tehát $80k+2222$, azaz a négyzeteink összterülete nem lehet négyzetszám. Így nem lehet belőlük nagyobb négyzetet összeállítani. (***2*** *pont*)

Összesen: 7 pont

2. Megoldás
Tegyük fel, hogy k darab 9×9-es és $2222-k$ darab 1×1-es négyzetet választottunk. Ekkor az összterületük $81k+(2222-k)=80k+2222$. (***2*** *pont*)
Ez az érték biztosan páros, de a fele, $40k+1111$ biztosan páratlan, így $80k+2222$ nem osztható 4-gyel. (***1*** *pont*)
A páros négyzetszámok viszont 4-gyel is oszthatóak. (***2*** *pont*)
Tehát $80k+2222$, azaz a négyzeteink összterülete nem lehet négyzetszám. Így nem lehet belőlük nagyobb négyzetet összeállítani. (***2*** *pont*)

Összesen: 7 pont

3. Keressük meg azokat az $\overline{abcd}$ négyjegyű és $\overline{xyz}$ háromjegyű számokat, amelyekre a következők igazak: $\overline{abcd}=70\cdot\overline{xyz}$, $x=a-b$, $y=b-c$, $z=c-d$.

Megoldás
$d=0$, hiszen $70\cdot\overline{xyz}$ osztható 10-zel. (***1*** *pont*)
Egyszerűsítve az egyenlőséget: $\overline{abc}=7\cdot\overline{xyz}$. (***1*** *pont*)
x csak 1 lehet, különben $\overline{xyz}$ legalább 200, és akkor a 7-szerese már négyjegyű szám . (***1*** *pont*)
Mivel $z=c-d=c$, így c olyan szám, melynek 7-szerese ugyanarra a számjegyre végződik, mint c. Tehát $c=0$ vagy $c=5$. (***1*** *pont*)
Mivel $1=x=a-b$, így a eggyel több b-nél. a legalább 7 (hiszen $7\cdot\overline{xyz}$ legalább 700), így a következő 6 lehetőség van $\overline{abc}$-re: 760, 870, 980, 765, 875, 985. Ezek közül csak a 875 lesz jó. (***1*** *pont*)
A feladat egyetlen megoldása: $\overline{abcd}=8750$, $\overline{xyz}=125$. (***2*** *pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés
A helyes megoldás közlése önmagában 2 pontot ér.

Az NTP-TV-15-0080. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.
Nemzeti Tehetség Program
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Emberi Erőforrás Támogatáskezelő

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

4. A király leghűségesebb szolgálójának a következő ajánlatot teszi:
,,Ebben a ládában 2016 aranytallér van. Minden nap két lehetőség közül választhatsz.
1) Ha a ládában páros számú aranytallér van, elveheted az aranytalléroknak pontosan felét.
2) Visszatehetsz a ládába pontosan 77 aranytallért az addig megszerzett aranyakból.
Rajtad kívül más nem fog sem betenni, sem kivenni aranyat. Ezt addig folytathatod, ameddig csak szeretnéd."
Legfeljebb hány tallér jutalmat szerezhet így a ládából a szolgáló, és hogyan tudja ezt elérni?

Megoldás

Vegyük észre, hogy a 2016 osztható 7-tel. Ha egy lépés előtt az aranytallérok száma oszható 7-tel, a lépés után is az marad: 7-tel osztható páros számnak a fele is osztható 7-tel (például a számelmélet alaptétele alapján), és egy 7-tel osztható számot 77-tel növelve ismét 7-tel osztható számot kapunk, hiszen a 77 osztható 7-tel, és két 7-tel osztható szám összege osztható 7-tel. (***2*** *pont*)

Azt is észrevehetjük, hogy a ládában mindig marad legalább egy aranytallér: pozitív szám fele is pozitív, és pozitív számot növelve pozitív marad. (***1*** *pont*)

Így legalább 7 aranytallérnak maradnia kell a végén a ládában: 7 a legkisebb 7-tel osztható pozitív egész. (***1*** *pont*)

Ez meg is valósítható például a következő módon (mohó algoritmussal, csak akkor növelünk 77-tel, ha muszáj, mert felezni nem tudunk):

$$2016 \xrightarrow{1)} 1008 \xrightarrow{1)} 504 \xrightarrow{1)} 252 \xrightarrow{1)} 126 \xrightarrow{1)} 63 \xrightarrow{2)} 140 \xrightarrow{1)} 70 \xrightarrow{1)} 35 \xrightarrow{2)} 112 \xrightarrow{1)} 56 \xrightarrow{1)} 28 \xrightarrow{1)} 14 \xrightarrow{1)} 7.$$

(***2*** *pont*)

Így a megszerezhető aranytallérok maximális száma: 2016-7=2009. (***1*** *pont*)

Összesen: 7 pont

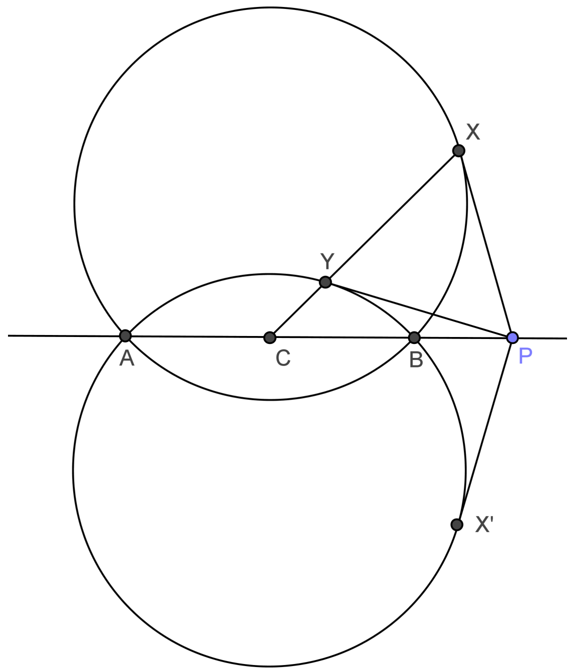
Az NTP-TV-15-0080. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

5. Adott két egyenlő sugarú kör, melyek egymást az A és a B pontban metszik. Felveszünk egy P pontot az AB szakasz B-n túli meghosszabbításán. A P pontból érintőt húzunk a két körhöz úgy, hogy az érintési pontok, X és Y az AB egyenesének ugyanarra az oldalára essenek. Tudjuk, hogy a rövidebb $\widehat{XB}$ és a rövidebb $\widehat{BY}$ körív együtt egy negyedkörívet tesz ki. Mekkora szöget zár be az XY és az AB egyenes?

Megoldás Az ábra jelöléseit használjuk. Tükrözzük az X pontot az AB egyenesre. X tükörképe, X' a másik körön lesz, mert a két kör szimmetrikusan helyezkedik el az AB egyenesre nézve (az egyenlő sugarak miatt). $PX = PX'$ a tükrözés miatt és $PX' = PY$, mert egy pontból egy körhöz húzott két érintőszakasz egyforma hosszú.tehát $PX = PY$. (***3** pont*)

Mivel a rövidebb BX és a rövidebb BX' ív egyforma hosszú a tükrözés miatt, így a feladat feltétele alapján a rövidebb YX' ív egy negyedkörív. Ez pedig azt jelenti, hogy az $X'PY\sphericalangle$ szög derékszög (hiszen a PY és a PX' sugarak merőlegesek egymásra a negyedkörív miatt). (***1** pont*)



Jelölje a $BPY\sphericalangle$ szöget x. Ekkor $BPX\sphericalangle = BPX'\sphericalangle = 90° - x$, és így $YPX\sphericalangle = 90° - 2x$. Mivel az XYP háromszög egyenlőszárú, így $XYP\sphericalangle = YXP\sphericalangle = 45° + x$. Másrészt az $XYP\sphericalangle$ szög a CPY háromszög külső szöge, így egyenlő a nem mellette fekvő két belső szög összegével. Ebből azonnal következik, hogy a keresett szög, $PCY\sphericalangle = 45°$. (***3** pont*)

Összesen: 7 pont

Az NTP-TV-15-0080. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.