TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

45. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló

HETEDIK OSZTÁLY

1. 20 teljesen azonos golyó belsejében elhelyeztük a pozitív egész számokat 1-től 20-ig, majd a golyókat egy dobozba tettük. Ezt követően egyesével elkezdjük kihúzni a golyókat és azonnal megállunk, ha az addig kihúzott golyókban lévő számok

   (a) szorzata

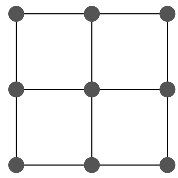
   (b) összege

   páros. Mindkét esetben add meg, hogy mi az a legkisebb szám, ahány húzásnál több biztosan nem történhetett.

   Megoldás
   A számok szorzata akkor és csak akkor lesz páros, ha van közöttük páros. (***1*** *pont*)
   Tehát az első esetben az első páros számot tartalmazó golyó felbukkanásáig fog tartani a húzás. (***1*** *pont*)
   Mivel 10 páratlan számot tartalmazó golyó van, így legfeljebb 11 golyót húzhattunk ki ebben az esetben. (***1*** *pont*)
   Ha az első páros összegig húzunk, akkor ha az első golyóban páros szám van, akkor rögtön véget is ér a húzás. (***1*** *pont*)
   Ha az első golyóban páratlan szám van, akkor a következő páratlan számot tartalmazó golyóig fog tartani a húzás. (***1*** *pont*)
   Mivel összesen 10 páros golyó van, így legfeljebb $1 + 10 + 1 = 12$ golyót húzhatunk ki ebben az esetben a dobozból. (***2*** *pont*)
   Összesen: 7 pont

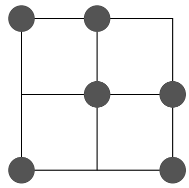
Az NTP-TV-15-0080. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.
Nemzeti Tehetség Program
Emberi Erőforrások Minisztériuma
Emberi Erőforrás Támogatáskezelő

2. Egy 2×2-es négyzetrács 3×3 rácspontja közül legfeljebb hányat színezhetünk pirosra, hogy ne legyen olyan téglalap, amelynek mind a négy csúcsa piros?



Megoldás

6 pontot ki lehet választani például az ábrán látható módon. (*3 pont*)



Ha ki lehetne választani 7 pontot, a skatulyaelv alapján az egyik sorból mindhárom pontot ki kéne választani. (*2 pont*)

Ezen kívül még kell lennie 4 pontnak, tehát a maradék két sorból az egyikben legalább két pontnak kell lennie. (*1 pont*)

Azonban ez a két pont és a három kiválasztott pontot tartalmazó sor azon két pontja, melyek egy oszlopban vannak ezzel a két ponttal, téglalapot alkotnak. (*1 pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés

A konstrukciónál ellenőrizni kell azt is, hogy a négy oldalfelező pont ne legyen kiválasztva, hiszen azok négyzetet (és így téglalapot) alkotnak.

3. Gondoltunk egy háromjegyű számra. Tudjuk, hogy az alábbi 7 állítás nem mind igaz, de az egymást követő állítások közül legalább az egyik igaz.
A) A szám osztható 7-tel.
B) A szám osztható 11-gyel.
C) A szám osztható 13-mal.
D) A szám osztható 77-tel.
E) A szám osztható 91-gyel.
F) A szám osztható 143-mal.
G) A szám utolsó számjegye 5.
Mi lehet a gondolt szám?

Az NTP-TV-15-0080. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

Megoldás
Mivel $77 = 7 \cdot 11$ és $91 = 7 \cdot 13$, és a D) és E) állítások közül legalább az egyik igaz, a szám biztosan osztható 7-tel. (***1** pont*)
Hasonlóan, mivel $143 = 11 \cdot 13$, és az E) és F) állítások közül legalább az egyik igaz, a szám biztosan osztható 13-mal. (***1** pont*)
Tehát az A) és C) állítások biztosan igazak. Ha a B) állítás is igaz lenne, akkor a szám osztható lenne $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$-gyel, tehát nem lehetne háromjegyű. Így a B) állítás hamis. (***1** pont*)
Tehát a szám osztható 7-tel és 13-mal, de 11-gyel nem. Így a D) és F) állítások hamisak, az E) állítás igaz. (***1** pont*)
Mivel F) hamis, G)-nek igaznak kell lennie. Tehát a szám 5-ösre végződik, azaz 5-tel osztható és páratlan. (***1** pont*)
A szám 91-gyel is osztható az E) állítás miatt, így $5 \cdot 91 = 455$-tel is osztható. (***1** pont*)
Mivel a szám páratlan és háromjegyű, csak a 455 felel meg. Tehát a gondolt szám a 455. (***1** pont*)
Összesen: 7 pont

4. Van rengeteg 1×1-es és rengeteg 9×9-es négyzetünk. Ki lehet-e választani közülük 2222 darabot úgy, hogy össze lehessen belőlük állítani egy nagyobb négyzetet?

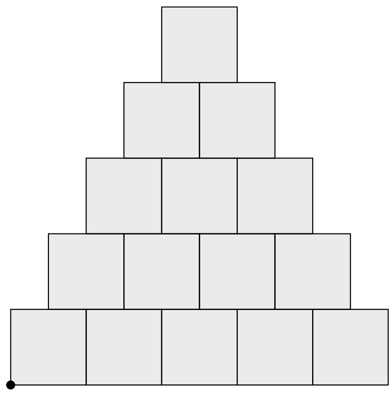
1. Megoldás
Tegyük fel, hogy k darab 9×9-es és $2222 - k$ darab 1×1-es négyzetet választottunk. Ekkor az összterületük $81k + (2222 - k) = 80k + 2222$. (***2** pont*)
Mivel $80k$ osztható 10-zel, ezért $80k + 2222$ utolsó számjegye 2. (***1** pont*)
Négyzetszám utolsó számjegye viszont nem lehet 2. (***2** pont*)
Tehát $80k + 2222$, azaz a négyzeteink összterülete nem lehet négyzetszám. Így nem lehet belőlük nagyobb négyzetet összeállítani. (***2** pont*)
Összesen: 7 pont

2. Megoldás
Tegyük fel, hogy k darab 9×9-es és $2222 - k$ darab 1×1-es négyzetet választottunk. Ekkor az összterületük $81k + (2222 - k) = 80k + 2222$. (***2** pont*)
Ez az érték biztosan páros, de a fele, $40k + 1111$ biztosan páratlan, így $80k + 2222$ nem osztható 4-gyel. (***1** pont*)
A páros négyzetszámok viszont 4-gyel is oszthatóak. (***2** pont*)
Tehát $80k + 2222$, azaz a négyzeteink összterülete nem lehet négyzetszám. Így nem lehet belőlük nagyobb négyzetet összeállítani. (***2** pont*)
Összesen: 7 pont

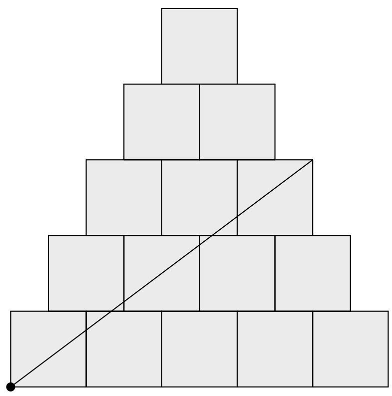
Az NTP-TV-15-0080. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

5. Az ábrán látható alakzatot négyzetekből állítottuk össze. Határozd meg azt az egyenest, amely áthalad az alakzat bal alsó csúcsán (az ábrán feketével jelölve), és felezi az alakzat területét. Válaszodat indokold!



1. megoldás
Kössük össze a bal alsó csúcsot a 3 négyzetet tartalmazó sor utolsó négyzetének jobb felső csúcsával! Megmutatjuk, hogy az így kapott egyenes felezi az alakzat területét. (***2** pont*)



Tekintsük az alsó három sor bal szélén lévő 3-3 négyzetből álló alakzatot. Ez középpontosan szimmetrikus a középen lévő négyzet átlóinak metszéspontjára. (***1** pont*)
Mivel az egyenesünk áthalad ennek az alakzatnak a szimmetriaközéppontján, ezért felezi annak a területét. (***2** pont*)
Marad még a legfelső 3 négyzet az egyenes egyik oldalán, és a jobb alsó 3 négyzet az egyenes másik oldalán. Ezeknek a területe is egyenlő. (***1** pont*)
Így az egyenesünk felezi a 15 négyzetből álló alakzat területét. (***1** pont*)

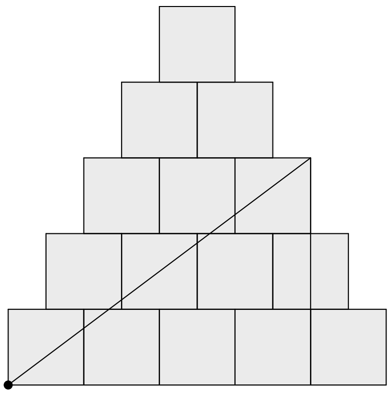
Összesen: 7 pont

Az NTP-TV-15-0080. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

2. megoldás

Kössük össze a bal alsó csúcsot a 3 négyzetet tartalmazó sor utolsó négyzetének jobb felső csúcsával! Megmutatjuk, hogy az így kapott egyenes felezi az alakzat területét. (***2*** *pont*)



Állítsunk merőlegest a 3 négyzetet tartalmazó sor utolsó négyzetének jobb felső csúcsából az alakzatot alulról határoló egyenesre. (***1*** *pont*)

Így az egyenesünk alatt egy derékszögű háromszög keletkezik. (***1*** *pont*)

Ennek területe $\frac{4 \cdot 3}{2} = 6$ négyzet területének felel meg. (***1*** *pont*)

Az egyenesünk ugyanezen oldalán még 1,5 négyzet található, így összesen 7,5 négyzetegységnyi terület található az egyenesünk egyik oldalán. (***1*** *pont*)

Ez éppen a 15 négyzetből álló alakzat területének a fele. Így az egyenesünk felezi a 15 négyzetből álló alakzat területét. (***1*** *pont*)

Összesen: 7 pont

Az NTP-TV-15-0080. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.