TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

45. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló

HATODIK OSZTÁLY

1. Az $1, 2, 3, \ldots, 9$ számokat hányféleképpen lehet úgy sorbarendezni, hogy nem állhat egymás mellett két páratlan szám?
(Az $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ tehát egy megfelelő sorozat, míg a $3, 2, 1, 4, 5, 7, 6, 8, 9$ nem, hiszen az 5 és a 7 szomszédosak.)

Megoldás
Mivel 9 szám van és ebből 5 páratlan, amik nem állhatnak egymás mellett, ezért feltétlenül *páratlan, páros, páratlan, páros, páratlan, páros, páratlan, páros, páratlan* sorrendben kell állniuk a számoknak. (***2** pont*)
Mivel más feltétel nincs, így minden olyan sorrend megfelelő, amelyben így állnak a számok.
A 4 páros számot a 4 helyre $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$-féleképpen helyezhetjük el. (***2** pont*)
Hasonlóan az 5 helyre az 5 páratlan számot: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$-féleképpen. (***2** pont*)
Mivel a páratlanok és a párosak elhelyezése független egymástól, ezért összesen $24 \cdot 120 = 2880$ megfelelő elhelyezés van. (***1** pont*)
Összesen: 7 pont

2. Egy négyjegyű pozitív egész számról a következőket tudjuk:
1) Minden számjegye különböző.
2) Számjegyeinek összege megegyezik 2016 számjegyeinek összegével.
3) Számjegyeinek szorzata megegyezik 2016 számjegyeinek szorzatával.
Melyik a

(a) legkisebb
(b) legnagyobb

ilyen szám?

Megoldás
Mivel a keresett számok számjegyeinek a szorzata 0, és minden számjegyük különböző, így mindkét számban pontosan egy 0 számjegynek kell szerepelnie. (***1** pont*)

(a) Mivel négyjegyű számról van szó, ezért az első számjegy nem lehet 0, és minél kisebb az első számjegy, annál kisebb a szám, ezért válasszuk az első számjegyet 1-nek. Ezen belül

Az NTP-TV-15-0080. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

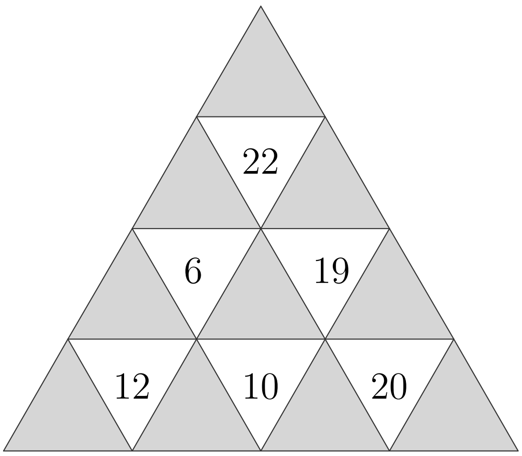
minél kisebb a második számjegy, annál kisebb a szám, és a második számjegy már lehet 0, így válasszuk ezt. (***1** pont*)
Mivel a számjegyek összege 9 $(2 + 0 + 1 + 6)$, ezért a harmadik és negyedik számjegy összegének 8-nak kell lennie. (***1** pont*)
Minél kisebb a harmadik számjegy, annál kisebb a szám. Mivel az első számjegy 1, így a legkisebb szóba jövő harmadik számjegy a 2. Vagyis a keresett szám az 1026. (***1** pont*)

(b) Minél nagyobb egy négyjegyű szám első számjegye, annál nagyobb a szám. Válasszuk tehát az első számjegyet a lehető legnagyobbra. Mivel a számjegyek mind különbözőek, a három legkisebb számjegy összege legalább 0+1+2=3. Ezért a legnagyobb számjegy legfeljebb 6 lehet, hiszen a jegyek összege 9. Az első számjegy tehát a 6-os. (***1** pont*)
Továbbra is a nagyobb számjegyeket minél előbbre érdemes tenni, hiszen annál nagyobb lesz a szám. Már csak a $2, 1, 0$ számjegyek használhatók. (***1** pont*)
Így a legnagyobb szám a 6210. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés
Mindkét részfeladat esetén a helyes válasz puszta közlése 1-1 pontot ér.

3. (a) Írjuk be 1-től 10-ig a számokat a szürke háromszögekbe úgy, hogy minden fehér háromszögben a vele oldallal szomszédos háromszögekbe írt számok összege szerepeljen!
(b) Lehet-e találni két kitöltést, amelyekben a középső háromszögbe írt szám különbözik?

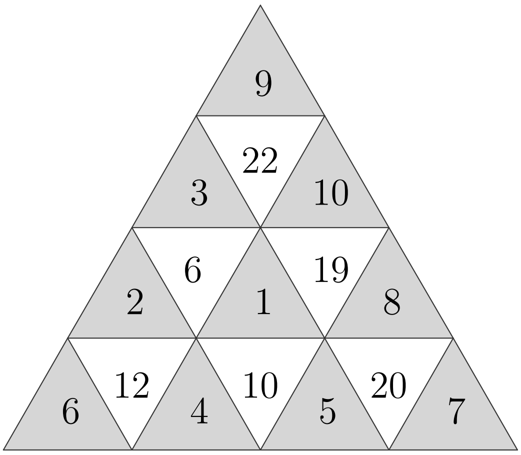


Az NTP-TV-15-0080. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

Megoldás

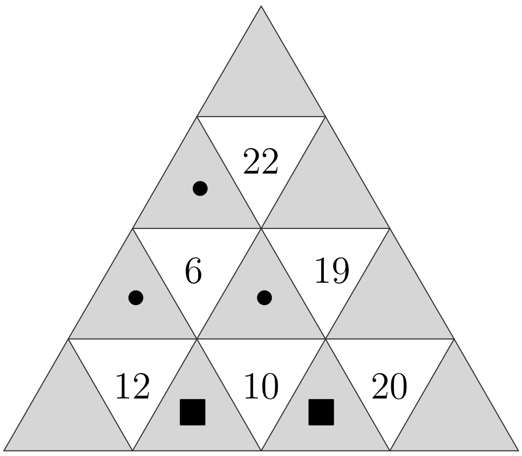
(a) Az egyetlen helyes kitöltés:



(*3* pont)

(b) **1. megoldás**

Nézzük az ábrán •-tal jelölt három háromszögeket. Az ezekbe írt számok összege 6, tehát ezen a három mezőn kell lennie az 1, 2, 3 számoknak. (*1* pont)



Tekintsük most az ábrán ■-tel jelölt két mezőt. A legkisebb két ideírható szám a 4 és az 5. (*1* pont)

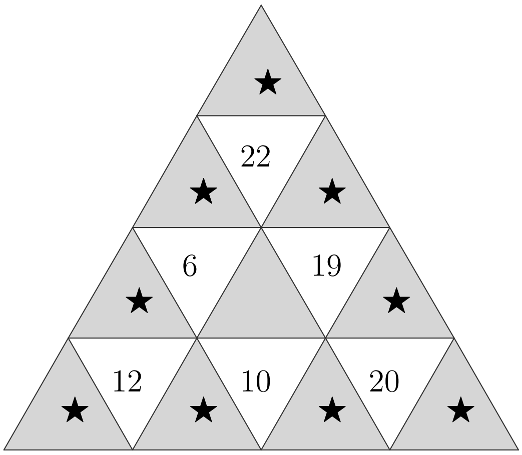
Emiatt a középső mezőbe csak az 1 kerülhet, hiszen a két ■-tel jelölt háromszögbe és a középsőbe írt számok összege 10. (*1* pont)

Tehát nincs két olyan kitöltés, amelyben a középső mezőbe írt számok különböznek. (*1* pont)

Az NTP-TV-15-0080. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

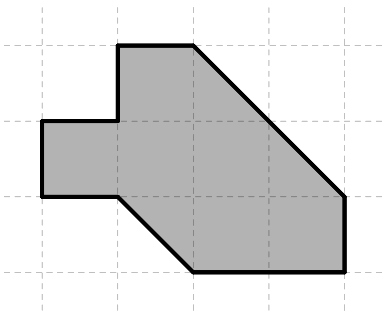
2. megoldás



A 10 beírt szám összege $1 + 2 + 3 + \ldots + 10 = 55$. (***1*** *pont*)
Tudjuk, hogy az ábrán $\bigstar$-gal jelölt számok összege $22 + 12 + 20 = 54$. (***2*** *pont*)
A megjelölt számok között csak a középső mező száma nem szerepel, így annak feltétlenül 1-nek kell lennie. (***1*** *pont*)

4. Osszuk fel az itt látható alakzatot
   (a) 3
   (b) 5
   (c) 15

   egybevágó (tükrözést is megengedve egymással fedésbe hozható) részre!

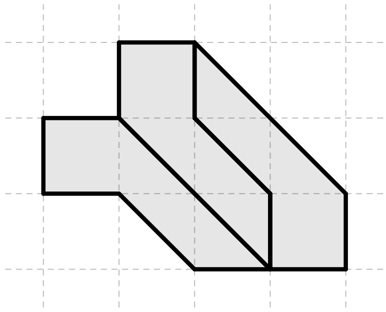


Az NTP-TV-15-0080. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

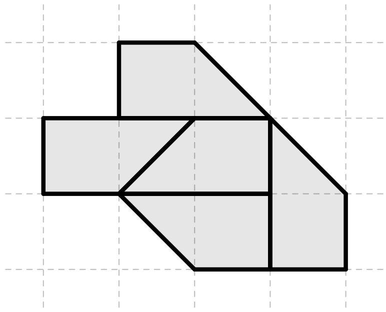
Megoldás

3 egybevágó részre az alábbi módon bonthatjuk fel az alakzatot:



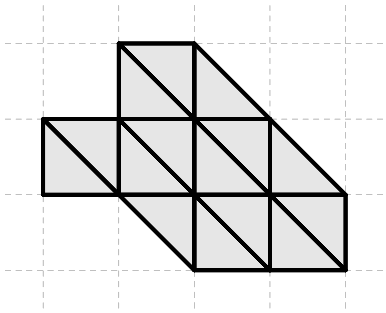
(***3*** *pont*)

5 egybevágó részre az alábbi módon bonthatjuk fel az alakzatot:



(***2*** *pont*)

15 egybevágó részre az alábbi módon bonthatjuk fel az alakzatot:



(***2*** *pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés

Mind a 3 részfeladatra egyéb megfelelő megoldások is léteznek, minden esetben az ezektől eltérő jó megoldásokért jár az adott résznek megfelelő részpontszám.

Az NTP-TV-15-0080. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT
1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901
NSZFH nyilvántartásba vételi szám: E-000226/2014

Ha valaki nem ad jó felosztást, de kiszámolja, hogy hány egység területűnek kell egy résznek lennie (a) 2,5 b) 1,5 c) 0,5), akkor azért összesen 2 pont jár. Ha csak egy részfeladatnál teszi ezt meg, akkor az 1 pontot ér.

5. A király leghűségesebb szolgálójának a következő ajánlatot teszi:
,,Ebben a ládában 2016 aranytallér van. Minden nap két lehetőség közül választhatsz.
1) Ha a ládában páros számú aranytallér van, elveheted az aranytalléroknak pontosan a felét.
2) Visszatehetsz a ládába pontosan 10 aranytallért az addig megszerzett aranyakból.
Rajtad kívül más nem fog sem betenni, sem kivenni aranyat. Ezt addig folytathatod, ameddig csak szeretnéd."
Legfeljebb hány tallér jutalmat szerezhet így a ládából a szolgáló, és hogyan tudja ezt elérni?

Megoldás

2015 aranytallér megszerezhető. (***1** pont*)

Világos, hogy ez a lehető legtöbb, hiszen 1 aranytallérnak mindenképpen maradnia kell minden lépés után. Az első típusú lépésben marad arany feltétlenül, hiszen pozitív szám fele is pozitív, míg a második lépés növeli az aranyak számát. (***2** pont*)

A következő lépéssorozatot követően 1 aranytallér marad a ládában, vagyis 2015 aranytallért szerez az, aki ezt végrehajtja:

$$2016 \xrightarrow{1)} 1008 \xrightarrow{1)} 504 \xrightarrow{2)} 514 \xrightarrow{2)} 524 \xrightarrow{2)} \ldots \xrightarrow{2)} 1024 \xrightarrow{1)} 512 \xrightarrow{1)} 256 \xrightarrow{1)} \ldots \xrightarrow{1)} 8 \xrightarrow{1)} 4 \xrightarrow{1)} 2 \xrightarrow{1)} 1.$$

(***4** pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés

Más lépéssorozatokkal is elérhető, hogy egyetlen aranytallér maradjon a ládában, természetesen azokért is jár a 4 pont.

Az NTP-TV-15-0080. sz. projektet az Emberi Erőforrások Minisztériuma támogatja.

Nemzeti Tehetség Program

Emberi Erőforrások Minisztériuma

Emberi Erőforrás Támogatáskezelő