
Kalmár László (matematikus)

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

44. ORSZÁGOS TIT KALMÁR LÁSZLÓ MATEMATIKAVERSENY

Megyei forduló - 2015. április 11.

HETEDIK OSZTÁLY - Javítási útmutató

1. Ki lehet-e tölteni a következő táblázat mezőit pozitív egész számokkal úgy, hogy minden sorban és minden oszlopban a számok szorzata egyenlő legyen?

		10
3		14
	35	

1. megoldás

Tegyük fel, hogy létezik helyes kitöltés. Legyen a középső oszlop első eleme x, a második y.

	x	10
3	y	14
	35	

Mivel a középső sor és a középső oszlop szorzata megegyezik, így $3 \cdot y \cdot 14 = x \cdot y \cdot 35$. (***2** pont*)
Mivel $y > 0$, ezért ebből $3 \cdot 14 = x \cdot 35$ következik. (***2** pont*)
Mivel x egész, a jobb oldal osztható 5-tel, a bal oldal viszont nem, ez ellentmondás. (***2** pont*)
Tehát **nem lehet** a táblázatot megfelelően kitölteni. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

2. megoldás

A szorzatok egyenlőségéből következik, hogy a szorzatok prímfelbontásában az 5 kitevője megegyezik. (***1** pont*)
Legyen a középső sor középső mezőjében lévő szám prímfelbontásában az 5 kitevője n. A középső sor szélső számai nem oszthatók 5-tel, így ennek a sornak a szorzatában az 5 kitevője n. (***2** pont*)
A középső oszlopban a 35 osztható 5-tel, így ennek az oszlopnak a szorzatában az 5 kitevője legalább $n + 1$. (***2** pont*)
Tehát a középső sor és a középső oszlop szorzatában az 5 kitevője különböző, így a szorzatok nem lehetnek egyenlők. (***1** pont*)

Tehát **nem lehetséges** a táblázatot megfelelően kitölteni. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

FINY: 00516-2008
NMH: E-000226/2014

3. megoldás

Mivel a számok között szerepel 5-tel osztható, bármely sor vagy oszlop szorzatának oszthatónak kell lennie 5-tel. (***1** pont*)

Mivel a középső sor megadott számai 5-tel nem oszthatók, ezért a középsőnek 5-tel oszthatónak kell lennie. (***1** pont*)

Ekkor a középső oszlop szorzatában ez a szám, és a 35 is szerepel, ezért a szorzat 25-tel is osztható. (***1** pont*)

Emiatt viszont a középső sor szorzata is 25-tel osztható, tehát a középső szám is 25-tel osztható. (***1** pont*)

Így viszont a középső oszlop szorzata már 125-tel is osztható lesz. (***1** pont*)

Ezt folytatva adódik, hogy a középső számnak az 5 tetszőlegesen nagy hatványával oszhatónak kell lennie. (***1** pont*)

Mivel csak pozitív egészeket írhatunk a mezőkbe, nincs megfelelő középső szám, így a kitöltés **nem lehetséges**. (***1** pont*)

Összesen: 7 pont

2. Van 6 darab, egyforma, L-alakú műanyag lapunk, amelyek 3 egységnégyzetből vannak összeállítva: .

   Mind a 6 műanyag lap felhasználásával építünk egybefüggő síkbeli alakzatokat úgy, hogy csak teljes négyzetoldal mentén szabad illeszteni a lapokat egymáshoz, és nem lehet a lapokat egymásra helyezni.

   Lehet-e a kapott alakzat kerülete:

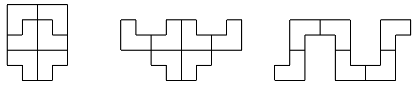
   (a) 18?
   (b) 25?
   (c) 28?
   (d) 38?
   (e) 40?

   Ha igen, akkor mutass példát a megfelelő kerületű alakzatra! Ha nem, akkor bizonyítsd be, hogy nem lehet!

Megoldás

Az (a), (c), (d) kérdések esetén elérhető a megadott kerület, például az alábbi alakzatok esetén:

(a) $K = 18$ (c) $K = 28$ (d) $K = 38$



A fentiektől különböző helyes megoldások is egy-egy pontot érnek. (***3** × **1** = **3** pont*)

Egy lap kerülete 8 egység, így a 6 darab összkerülete $6 \cdot 8 = 48$ egység. Az összeillesztett alakzat


Kalmár László (matematikus)

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

kerületébe az érintkező négyzetoldalak nem számítanak bele, ez összesen páros egységnyivel csökkenti a kerületet. Így a kerület mértéke csak páros lehet, nem lehet 25 egység. A (b) kérdésre a válasz így nemleges. (***2** pont*)
Mivel az alakzat egybefüggő, legalább 5 lap-pár érintkezik egymással négyzetoldalban. Minden ilyen érintkezés legalább 2 egységnyivel csökkenti a kerületet, így az legfeljebb $48 - 2 \cdot 5 = 38$ egységnyi lehet. Tehát a kerület nem lehet 40 egység, így a (d) kérdésre is nemleges a válasz. (***2** pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés.
Az (a), (c), (d) kérdések esetén akkor és csak akkor jár 1-1 pont, ha van helyes konstrukció. A (b) és (d) esetekben sem jár pont önmagában a válaszért, itt az indoklás kidolgozottságától függően adhatunk esetenként 1 vagy 2 pontot.

3. 8 pozitív egész szám szorzata 500-ra végződik. Hány páros szám lehet a 8 között? Minden általad lehetségesnek gondolt darabszámra mutass példát! Bizonyítsd, hogy más lehetőség nincs!

Megoldás
Egy tízes számrendszerben felírt szám pontosan akkor osztható 4-gyel, ha az utolsó két jegyéből alkotott kétjegyű szám osztható 4-gyel. Mivel a 00 osztható 4-gyel, ebből következik, hogy a szorzat osztható 4-gyel. (***1** pont*)
Egy tízes számrendszerben felírt szám pontosan akkor osztható 8-cal, ha az utolsó három jegyéből alkotott kétjegyű szám osztható 8-cal. Az 500 nem osztható 8-cal, tehát a szorzat sem osztható 8-cal. (***1** pont*)
Tehát a szorzat prímtényezős felbontásában a 2-es a második hatványon szerepel, azaz legalább egy és legfeljebb két páros szám van a 8 között. (***1** pont*)
Ha csak egy számban szerepel 2-es prímtényező, akkor az illető szám osztható 4-gyel, de már 8-cal nem, a többi pedig mind páratlan. Erre egy lehetséges példa: 500, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1. (***2** pont*)
Ha a 2-es prímtényező két számban is szerepel, akkor a 8 szám közül kettő páros, de már 4-gyel nem osztható, a többi pedig mind páratlan. Erre példa: 250, 2, 1, 1, 1, 1, 1, 1. (***2** pont*)

Összesen: 7 pont

Megjegyzés.
Egy jó példa indoklás nélkül esetenként: ***1-1** pont.*
Ugyanarra az esetre adott több példáért nem jár több pont.

FINY: 00516-2008
NMH: E-000226/2014

Kalmár László (matematikus)

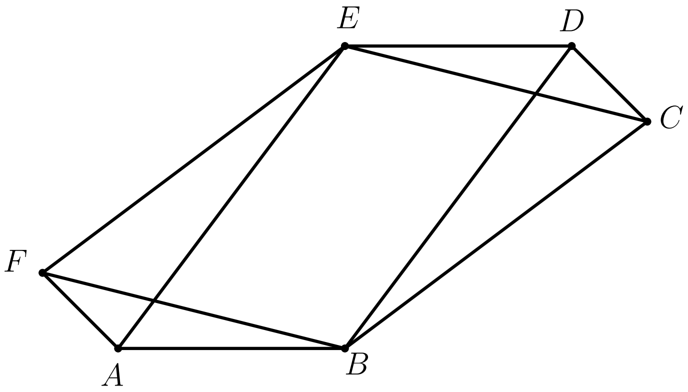
TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

4. $ABCDEF$ egy konvex hatszög a síkban. Tudjuk, hogy az $ABDE$ és a $BCEF$ négyszögek paralelogrammák. Bizonyítsd be, hogy $CDFA$ négyszög is paralelogramma!

Megoldás

Készítsünk a feltételeket kielégítő ábrát:

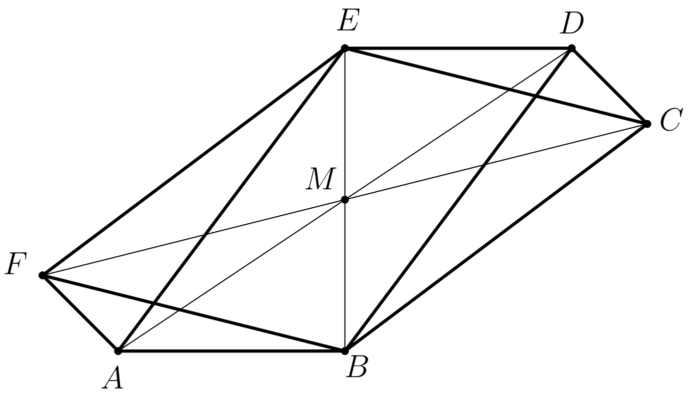


(***1*** *pont*)

Mivel $ABDE$ paralelogramma, így AD és BE kölcsönösen felezik egymást. (***1*** *pont*)

Hasonlóan, mivel $BCEF$ is paralelogramma, így BE és CF szintén kölcsönösen felezik egymást. (***1*** *pont*)

Ezek szerint a BE szakaszt mind AD, mind CF felezi, így a felezőpont egyértelműsége miatt egymást BE felezőpontjában metszik (mondjuk M-ben). (***2*** *pont*)



Sőt, mivel BE mindkettőt felezte, így az M pont mind AD-nek, mind pedig CF-nek felezőpontja. (***1*** *pont*)

Azaz AD és CF egymást kölcsönösen felezik, és mivel nem esnek egy egyenesre, ez éppen azt jelenti, hogy $AFDC$ paralelogramma. (***1*** *pont*)

Összesen: 7 pont

Kalmár László (matematikus)

TUDOMÁNYOS ISMERETTERJESZTŐ TÁRSULAT

1088 Budapest VIII., Bródy Sándor u. 16.
Postacím: 1431 Budapest, Pf. 176
E-mail: titnet@webinform.hu; Honlap: www.titnet.hu
Telefon: 327-8900 Fax: 327-8901

5. Egy nagy asztalra piros (P) és kék (K) korongokat pakolunk. Az első sorba 100 darabot helyezünk el. Ezt követően az első sor alá két-két korong közé egy-egy újabbat teszünk, mégpedig úgy, hogy két egyforma alá pirosat, két különböző alá kéket rakunk. Majd ugyanezt a szabályt mindig egy-egy sorral lejjebb alkalmazva teszünk korongokat a harmadik, negyedik, ..., végül a századik sorba (ide már csak egyetlen korong kerül).
Igaz-e, hogy ha az első sorban van kék korong, akkor összesen legalább 100 kék korong lesz az asztalon?

1. megoldás
Ha egy sorban van kék korong, akkor az összes felette levőben is van. Ez azért igaz, mert kék korongot akkor helyezünk le, ha felette egy kék és egy piros volt szomszédos. (***1** pont*)
Ha az utolsó sor egyetlen korongja kék, akkor a fentiek miatt mind a 100 sorban van legalább egy-egy. Így van összesen legalább 100 kék korong. (***1** pont*)
Ha a legalsó sorban piros korong van, akkor vegyük az a sort, amelyik a kék korongokat tartalmazó sorok közül a legalacsonyabban van. Mivel alatta csupa piros korong van, így ebben a sorban minden korong egyforma színű, tehát mindegyik kék. (***1** pont*)
Legyen ebben a sorban k darab kék korong. Mivel minden sorban eggyel kevesebb korong van, mint az előzőben, így efelett még $100-k$ darab sor van. (***2** pont*)
Ezek mindegyikében van legalább egy-egy kék korong az első megállapításunk szerint, ez legalább $100-k$ darab. (***1** pont*)
Így összesen legalább $k+(100-k)=100$ darab kék korong, tehát az állítás **igaz**. (***1** pont*)
Összesen: 7 pont

2. megoldás
Ha egy sorban van kék korong, akkor az összes felette lévő sorban is van. Ez azért igaz, mert kék korongot akkor helyezünk le, ha felette egy kék és egy piros volt szomszédos. (***1** pont*)
A kirakás után egyértelműen létezik egy olyan sor, amelyben még van kék korong, de alatta már nincs. Ha ez az n-edik sor, akkor a felette lévő $n-1$ sor mindegyikében van legalább egy-egy kék korong, ami legalább $n-1$ kék korong. (***1** pont*)
Ha az n-edik sor alatt még vannak korongok, azok mind pirosak. Így az n-edik sorban nem lehet egymás mellett piros és kék korong, hiszen alájuk kék kerülne. (***1** pont*)
Mivel kék korong van ebben a sorban, és kék mellett nem lehet piros, így mindegyik kék. (***1** pont*)
Mivel az első sorban 100 korong van, és minden sorban eggyel kevesebb, mint az előzőben, így az n-edik sorban $101-n$ darab korong van, amelyek mindegyike kék. (***2** pont*)
Így összesen legalább $(n-1)+(101-n)=100$ darab kék korongot raktunk ki, tehát az állítás **igaz**. (***1** pont*)
Összesen: 7 pont

FINY: 00516-2008
NMH: E-000226/2014