XV. Imolya Sándor matematika verseny – 2018. december 10.

1. Egy osztály tanulóinak $\frac{7}{12}$ része fiú, és az osztály $\frac{5}{9}$ része matekszakkörre jár. **/15 pont**

   a) Hányan járhatnak az osztályba, ha tudjuk, hogy 50-nél kevesebben vannak? **/6 pont**

   b) Mennyi a fiúk és lányok számának aránya? **/4 pont**

   c) A matekszakkörös fiúk száma legfeljebb illetve legalább hányadrésze lehet az osztály létszámának? **/5 pont**

2. A már szóba került matematika szakkörön az egyik diák, Sándor jelezte, hogy ha az idei évszámban (2018) az ezresek és a százasok helyén álló számjegyeket (2 és 0) összeadjuk, majd a tízesek és az egyesek helyén állókat is (1 és 8), majd a két összeget összeszorozzuk, akkor 18-at kapunk – ami azért nevezetes, mert Sándornak március 18-án van a névnapja. **/14 pont**

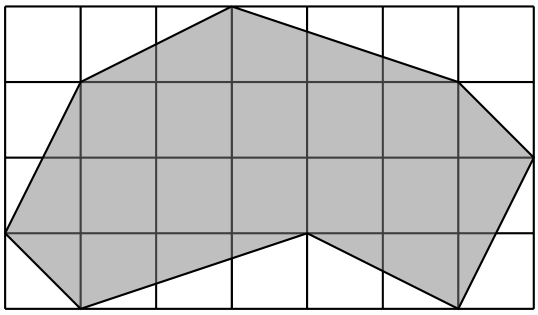
   Hány ilyen év lesz (vagy volt) ebben az évezredben (azaz az ezresek és százasok helyén álló számjegyek összegének és a tízesek és egyesek helyén álló számjegyek összegének a szorzata 18)?

3. Sándor (akinek március 18-án van a névnapja) és barátja, József (akinek egy nappal később, március 19-én van a névnapja) versenyez, hogy a legközelebbi matematika szakkörre ki hány versenyfeladatot old meg. **/14 pont**

   Sándor eddig másfélszer annyi feladatot oldott meg, mint József – viszont József rákapcsolt: míg Sándor csak 9 újabb feladatot oldott meg, addig József háromszor annyit. Így József átvette a vezetést, a Sándor és József által megoldott feladatok számának aránya így 6 : 7 lett.

   Ki hány feladatot oldott meg eddig?

4. A matematika szakkörösök ellátogatnak a technika szakkörösök foglalkozására, ahol az alábbihoz hasonló nyolcszöget vágták ki fémlapokból: **/11 pont**



   A matematika szakkörösök nem értették meg, hogy a technikások mire akarják a belső nyolcszöget felhasználni, viszont kiszámították nekik, hogy hány százalék a keletkező hulladék (az ábra fehér része).

   Számítsd ki Te is!

5. A matekszakkörösök rájöttek arra, hogy az idei év (2018) két prímszám szorzata. Mennyi az alábbi összeg értéke? **/8 pont**

$$(1;1009)+(2;1009)+(3;1009)+\ldots+(1008;1009)+(1009;1009)$$

   Az $(a;b)$ kifejezés az a és b legnagyobb közös osztóját jelenti (pl. $(6;9)=3$, $(7;9)=1$).

XV. Imolya Sándor matematika verseny – 2018. december 10.— Javítókulcs

1. Egy osztály tanulóinak $\frac{7}{12}$ része fiú, és az osztály $\frac{5}{9}$ része matekszakkörre jár. **/15 pont**

a) Hányan járhatnak az osztályba, ha tudjuk, hogy 50-nél kevesebben vannak? **/6 pont**

Mivel a törtek nem egyszerűsíthetőek ($(7;12)=1$, $(5;9)=1$), így a létszám osztható 12-vel és 9-cel.	2 pont	2 pont	
Azaz a 12 és a 9 legkisebb közös többszörösével, azaz 36-cal is osztható.	2 pont	4 pont	
50-ig csak egy (pozitív) szám osztható 36-tal.	1 pont	5 pont	
Tehát az osztálylétszám 36.	1 pont	6 pont	

b) Mennyi a fiúk és lányok számának aránya? **/4 pont**

Az osztály $\frac{7}{12}$-része fiú, azaz $\frac{5}{12}$-része lány.	2 pont	2 pont	
A kettő aránya pedig: $\frac{\frac{7}{12}}{\frac{5}{12}} = \frac{7}{5} = 7:5$	2 pont	4 pont	

c) A matekszakkörös fiúk száma legfeljebb illetve legalább hányadrésze lehet az osztály létszámának? **/5 pont**

$\frac{7}{12} > \frac{5}{9}$, tehát ha az összes fiú jár matekszakkörre, kapjuk a „legfeljebb” értékét, azaz legfeljebb $\frac{5}{9}$-része matekszakkörös fiú.	2 pont	2 pont	
A „legalább” pedig úgy határozható meg, ha minél több (azaz az összes) lány jár szakkörre, azaz az osztály $\frac{5}{12} = \frac{15}{36}$-része.	1 pont	3 pont	
A fennmaradó $\frac{5}{9} - \frac{5}{12} = \frac{20}{36} - \frac{15}{36} = \frac{5}{36}$ adja a matekszakkörös fiúk minimális arányát.	2 pont	5 pont	

2. A már szóba került matematika szakkörön az egyik diák, Sándor jelezte, hogy ha az idei évszámban (2018) az ezresek és a százasok helyén álló számjegyeket (2 és 0) összeadjuk, majd a tízesek és az egyesek helyén állókat is (1 és 8), majd a két összeget összeszorozzuk, akkor 18-at kapunk – ami azért nevezetes, mert Sándornak március 18-án van a névnapja. **/14 pont**

Hány ilyen év lesz (vagy volt) ebben az évezredben (azaz az ezresek és százasok helyén álló számjegyek összegének és a tízesek és egyesek helyén álló számjegyek összegének a szorzata 18)?

A 18-at háromféleképpen bonthatjuk két pozitív egész szám szorzatára: $1\cdot 18$, $2\cdot 9$ és $3\cdot 6$	1 pont	1 pont	
Mivel az ezresek helyén 2-es áll („ebben az évezredben”), és a százasok helyén legfeljebb 9 állhat, így az $1\cdot 18$ szorzat nem valósulhat meg.	2 pont	3 pont	
Ha a $2\cdot 9$ szorzatot akarjuk megvalósítani, akkor vagy úgy lehet, hogy a százasok helyén nulla szerepel, valamint a tízesek és egyesek helyén szereplő számjegyek összege 9.	1 pont	4 pont	
A kilenc *tízféleképpen* állítható elő két számjegy összegeként: $0+9$, $1+8$ $\dots 8+1$, $9+0$	2 pont	6 pont	
Ha az első két jegy összege a 9: a százasok helyén 7 szerepel, az utolsó két helyen pedig a 20, 11 ill. 02 *három* lehetőség valamelyike.	2 pont	8 pont	
A $3\cdot 6$ lehetőség: a százasok helyén 1 áll, az utolsó két helyen $0+6$, $1+5$ $\dots$ $5+1$, $6+0$, azaz *hét* lehetőség.	2 pont	10 pont	
A százasok helyén 5 áll, az utolsó két helyen $0+3$, $1+2$, $2+1$, $3+0$, azaz *négy* lehetőség.	2 pont	12 pont	
Összesen tehát $10+3+7+4=24$ lehetőség.	2 pont	14 pont	

3. Sándor (akinek március 18-án van a névnapja) és barátja, József (akinek egy nappal később, március 19-én van a névnapja) versenyez, hogy a legközelebbi matematika szakkörre ki hány versenyfeladatot old meg.

Sándor eddig másfélszer annyi feladatot oldott meg, mint József – viszont József rákapcsolt: míg Sándor csak 9 újabb feladatot oldott meg, addig József háromszor annyit. Így József átvette a vezetést, a Sándor és József által megoldott feladatok számának aránya így 6 : 7 lett.

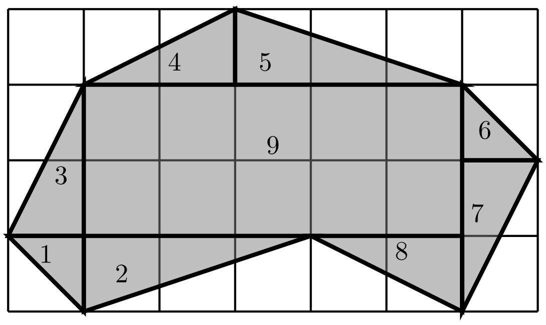
Ki hány feladatot oldott meg eddig?

/**14 pont**

Sándor eredetileg $1,5x$, József pedig x feladatot oldott meg.	2 pont	2 pont	
Sándor megoldott feladatainak száma: $1,5x+9$, Józsefé pedig $x+27$	2 pont	4 pont	
Az arányok szerint: $\frac{1,5x+9}{6}=\frac{x+27}{7}$	1 pont	5 pont	
$7(1,5x+9)=6(x+27)$	1 pont	6 pont	
$10,5x+63=6x+162$	1 pont	7 pont	
$4,5x=99$	1 pont	8 pont	
$x=22$	1 pont	9 pont	
József eddig 49, Sándor pedig 42 példát oldott meg eddig.	2 pont	11 pont	
Ellenőrzés	3 pont	14 pont	

4. A matematika szakkörösök ellátogatnak a technika szakkörösök foglalkozására, ahol az alábbihoz hasonló nyolcszöget vágták ki fémlapokból:

/**11 pont**



A matematika szakkörösök nem értették meg, hogy a technikások mire akarják a belső nyolcszöget felhasználni, viszont kiszámították nekik, hogy hány százalék a keletkező hulladék (az ábra fehér része).

Számítsd ki Te is!

A téglalap területe $4\cdot 7=28$ egység.	1 pont	1 pont	
A nyolcszög felbontása kilenc részre.	1 pont	2 pont	
Az 1. rész területe $0,5$, a 2. rész területe $1,5$, a 3. részé 1, a 4. részé 1, az 5. részé $1,5$, a 6. részé $0,5$, a 7. részé 1, a 8. részé 1, a 9. részé pedig 10 területegység.	5 pont	7 pont	A 9. rész 1 pont, két háromszög egy-egy pontot ér.
Az alakzat területe 18 egység.	1 pont	8 pont	
A hulladék területe $28-18=10$ egység.	1 pont	9 pont	
A hulladék kb. 35,7 %.	2 pont	11 pont	

5. A matekszakkörösök rájöttek arra, hogy az idei év (2018) két prímszám szorzata. Mennyi az alábbi összeg értéke?

/**8 pont**

$$(1;1009)+(2;1009)+(3;1009)+\ldots+(1008;1009)+(1009;1009)$$

Az $(a;b)$ kifejezés az a és b legnagyobb közös osztóját jelenti (pl. $(6;9)=3$, $(7;9)=1$).

A feladat szövege alapján $2018=2\cdot 1009$, azaz az 1009 prímszám.	1 pont	1 pont	
Mivel az 1009 prímszám, nincs az egyen kívül nála kisebb osztója.	2 pont	3 pont	
Ezért mindegyik „legnagyobb közös osztó” 1 lesz.	2 pont	5 pont	
Az összeg így $1+1+1\ldots+1+1009$	1 pont	6 pont	
Az összeg tehát $1008+1009=2017$.	2 pont	8 pont	