

KEZDŐK

Első forduló

Mindhárom kategória

1. Aladár és Béla együtt ünnepli születésnapját 2006-ban. Aladár pontosan kétszer annyi idős, mint Béla. Aladár születési évének utolsó két számjegyét felcserélve éppen Béla születési évét kapjuk. Mennyi idősök most? (6 pont)

2. Rest Elek nem készült a dolgozatra, de tudta, hogy ugyanazokat a feladatokat szokták kapni, mint a párhuzamos osztály, legfeljebb más sorrendben. Megtudta, hogy a párhuzamos osztályban A, C, D, B voltak a helyes válaszok. Így ő is ezt írta le valamilyen sorrendben. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a) nem lesz jó válasza; b) pontosan 1 jó válasza lesz; c) pontosan 2 jó válasza lesz; d) pontosan 3 jó válasza lesz; e) mind a négy válasza jó lesz? (6 pont)

3. Hányféleképpen lehet (a tízes számrendszerben) a 2006-ot legalább két egymást követő pozitív egész szám összegeként felírni? (8 pont)

4. Az $ABCD$ derékszögű trapézban AB párhuzamos CD -vel, AD merőleges AB -re és $AB = AD = 2CD$. Jelölje M az AC és BD átlók metszéspontját, és F az AD oldal felezőpontját! Bizonyítsa be, hogy MF merőleges BC -re! (10 pont)

5. Oldja meg a

$$p^q + q^p = r$$

egyenletet, ha p, q, r pozitív prímszámok! (10 pont)

Második (döntő) forduló

I. kategória: Legfeljebb heti 3 órában matematikát tanuló középiskolai tanulók

1. Igazolja, hogy $9^n + 8^n + 7^n + 6^n - 4^n - 3^n - 2^n - 1^n$ bármely n természetes szám esetén osztható 10-zel!

2. Adott egy hegyesszög tartomány belsejében a P pont. Szerkesszen P -n át olyan egyenest, amely mind a két szögcsúcsát metszi és a szögtartományból a legkisebb területű háromszöget metszi ki!

3. Igazolja, hogy ha az x valós számra $3 \leq x \leq 16$, akkor:

$$\sqrt{x+5} + \sqrt{2x-6} + \sqrt{49-3x} \leq 12.$$

II. kategória: Több, mint heti 3 órában matematikát tanuló (nem speciális tantervű) középiskolai tanulók

1. Le lehet-e ültetni egy kerek asztal köré hat olyan embert, akik közül mindenkinek pontosan két haragosa van (a harag kölcsönös) úgy, hogy senki ne üljön haragosa mellett?

2. Egy 4 dm élű kocka mindegyik csúcsát levágtuk olyan síkkal, amely a csúcsból induló élek felezőpontjaira illeszkedik. Az így kapott testtel ugyanígy jártunk el. Mennyi a most keletkezett test felszíne?

3. Tekintsük azokat a 9-jegyű számokat, amelyek az 1, 2, ..., 9 számjegyekből képezhetők úgy, hogy minden számjegy pontosan egyszer szerepel. Rendezzük ezeket növekvő sorba, majd vegyük a szomszédos számok különbségét! Melyek azok a számok, amelyek a kapott számok között páratlan sokszor szerepelnek?

III. kategória: Speciális tantervű osztályokban tanulók

1. Aladár és Béla a következő játékot játsszák. Felváltva mondanak egy-egy pozitív egész számot, azzal a megkötéssel, hogy a kimondott szám mindig kisebb, de legalább fele akkora legyen, mint az előzőleg elhangzott szám. Az győz, aki először mondja ki az 1-et. Aladár a 2006-os számmal kezdi a játékot. Mit kell erre mondania Bélának, ha azt akarja, hogy biztosan nyerjen?

2. Adott egy egység sugarú kör. Tekintsük azokat a körbe írható 2006-szögeket, melyek belsejükben tartalmazzák a kör középpontját. Bizonyítsuk be, hogy minden ilyen sokszög kerülete nagyobb, mint 4 egység!

3. Igazolja, hogy ha a p és a q pozitív egész számokra fennáll a $p^p = q^q$ egyenlőség, akkor $p = q$.

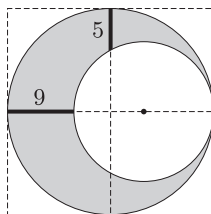
HALADÓK

I. kategória: Legfeljebb heti 3 órában matematikát tanuló középiskolai tanulók

Első (iskolai) forduló

1. Hány olyan egész számból álló $(x; y)$ számpár van, amelyre $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2005}$ teljesül?

2. A szultán kastélya egy négyzet alakú területen épült, és félhold alakú tó veszi körül, az *ábrán* látható módon.



A tavon két híd vezet át, melyek egyenesen átmegy a négyzet középpontján. A hidak hossza 5 és 9 méter.

Mekkora a négyzet alakú terület?

3. Ha $x < -1$, akkor mi az

$$\left| x^{-1} - \frac{\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x}\right)^2}{\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}} - \left(\frac{1}{1-x}\right)^{-1} \right|$$

kifejezés legkisebb értéke?

4. Az ABC háromszögben AA_1 , BB_1 , CC_1 magasságok, AA_2 , BB_2 , CC_2 súlyvonalak. Bizonyítsuk be, hogy az $A_2B_1C_2A_1B_2C_1A_2$ töröttvonal hossza az ABC háromszög kerületével egyenlő!

5. Határozza meg azokat az egész számokból álló $(x; y)$ számpárokat, amelyek kielégítik a következő egyenletet:

$$(x+2)^4 - x^4 = y^3.$$

Második forduló

1. Oldjuk meg az egész számok halmazán a $(\sqrt{2}-1)^6 = \sqrt{m} - \sqrt{m-1}$ egyenletet!

2. Igazoljuk, hogy ha egy derékszögű háromszög súlyvonalalaiból – mint oldalakból – derékszögű háromszög szerkeszthető, akkor a szerkesztett háromszög hasonló az eredeti háromszöghöz.

3. Milyen n pozitív egész esetén oldható meg az alábbi egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ xyz &= 2^n \end{aligned} \quad \text{ha } x, y, z \in \mathbb{Z}?$$

4. Válasszunk ki egy kocka csúcsai közül az összes lehetséges módon hármat, és tekintsük a csúcsok által meghatározott háromszögeket! Mekkora a kapott derékszögű háromszögek számának és az összes háromszög számának aránya?

Harmadik (döntő) forduló

1. Oldja meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán!

$$\begin{aligned} \text{I.} & \quad (x+y)^3 = z, \\ \text{II.} & \quad (y+z)^3 = x, \\ \text{III.} & \quad (z+x)^3 = y. \end{aligned}$$

2. Az AB szakasz egy belső pontja C , amire $AC > CB$. Az AB és BC szakaszok, mint átmérő fölé (AB azonos oldalán) félköröket rajzolunk, legyenek ezek rendre k_1 és k_2 . Az AB -re C -ben állított merőleges m . A k kör érinti az m egyenest, a k_2 félkört kívülről, a k_1 félkört pedig belülről. Legyen k középpontja O , és jelölje k és k_2 érintési pontját E . Végül az OE egyenes és m metszéspontja M .

Mutassuk meg, hogy $AC = EM$!

3. Nevezzünk egy halmazt *csonkának*, ha nincs két – nem feltétlenül különböző – elem a halmazban, aminek az összege is eleme a halmaznak. Mekkora az $\{1, 2, 3, \dots, 2n + 1\}$ halmaz maximális elemszámú *csonka* részhalmaza?

II. kategória: Több, mint heti 3 órában matematikát tanuló (nem speciális tantervű) középiskolai tanulók

Első (iskolai) forduló

1. Az a és b valós számra $a^2 + b^2 = 1$ teljesül, ahol $ab \neq 0$. Határozzuk meg az

$$\left(1 + \frac{1}{a^2}\right) \left(1 + \frac{1}{b^2}\right)$$

szorzat minimumát.

2. Az AB alapú egyenlő szárú háromszög alapjának felezőpontja F , súlypontja S , magasságpontja M , beírt köre k . Ha $FM = \sqrt{6}$ és S illeszkedik k -ra, akkor mekkora a háromszög kerülete?

3. A Piramis Bank elnöke a külvárosból jár be munkahelyére dolgozni. Hétköznapokon egy sofőr jön érte, aki minden nap ugyanabban az időpontban indul a banktól, felveszi az elnököt, és pontosan nyitásra megérkeznek. Egyik reggel a sofőr telefonált, hogy valami baj van az autóval, ezért valószínűleg késni fog. Az elnök emiatt a szokottnál egy órával korábban, gyalog indult munkába. A sofőr közben megjavította az autót, és mégis el tudott indulni a szokásos időpontban, így útközben találkozott a bankárral. Felvette, és nyitás előtt 20 perccel érkeztek a bankhoz.

Mennyi ideig sétált a bankár? (Feltehetjük, hogy az autó sebessége állandó és az utas felvétele nem jár idővesztéssel.)

4. Egy ABC hegyesszögű háromszög belsejében egy tetszőleges O pontból merőlegeseket bocsátunk az AB , BC és CA oldalakra. A talppontokat rendre jelöljük R -rel, P -vel és Q -val. Rajzoljunk kifelé négyzeteket az RB -re, PC -re és AQ -ra.

Mekkora a három négyzet területének összege, ha tudjuk, hogy $AR = 7$, $BP = 5$ és $CQ = 6$?

5. Határozza meg azokat az egész számokból álló $(x; y)$ számpárokat, amelyek kielégítik a következő egyenletet:

$$(x + 2)^4 - x^4 = y^3.$$

Második forduló

1. Határozza meg az a, b, c egészek értékét úgy, hogy a következő egyenlőség minden valós x -re teljesüljön:

$$(x - a) \cdot (x - 10) + 1 = (x + b) \cdot (x + c).$$

2. A t területű, m magasságú $ABCD$ húrtrapéz alapjai AB és CD , az átlók metszéspontja M , a trapéz körülírt körének középpontja O . A BC oldal felezőpontja E , az AD oldalé pedig F . Bizonyítsuk be, hogy ha $t = m^2$, akkor az $OEMF$ négyszög rombusz.

3. Határozzuk meg a valós számok halmazán értelmezett $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3x + 4}$ függvény legkisebb és legnagyobb értékét!

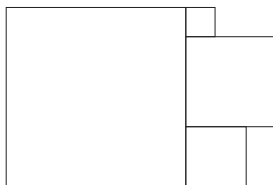
4. Az (a_n) számsorozatot a következő módon határozzuk meg: $a_1 = a$, ahol az „ a ” szám pozitív egész szám, $n \geq 1$ esetén pedig

$$a_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2} a_n, & \text{ha } a_n \text{ páros szám,} \\ 2a_n + 2, & \text{ha } a_n \text{ páratlan szám.} \end{cases}$$

Bizonyítsuk be, hogy $a = 2^{2006} + 5$ esetén a sorozatnak tagja az 1, 2, 3, 4, 5 számok mindegyike.

Harmadik (döntő) forduló

1. Egy négyzet egyik oldalára az *ábrán* látható módon három kisebb négyzetet rajzoltunk. Kössük össze a nagy és a középső kis négyzet középpontját, valamint a két szélső négyzet középpontját. Bizonyítsa be, hogy ezek a szakaszok derékszöget zárnak be!



2. Milyen n természetes számra igaz, hogy a $4^{2005} + 4^{2006} + 4^n$ összeg értéke négyzetszám?

3. Egy különleges számológép legfeljebb 10-jegyű nemnegatív egész számokkal tud dolgozni. Két művelet van a gépen. Az „N” művelet négyzetre emel, a „T” művelet pedig levágja a szám utolsó (egyesekek helyén álló) jegyét, ha a szám legalább kétjegyű.

Egy alkalommal valaki egy legfeljebb háromjegyű számból kiindulva, több művelet végrehajtása után, a 2 számot kapta eredményül.

Mi lehetett az eredeti szám?

III. kategória: Speciális tantervű osztályokban tanulók

Első (iskolai) forduló

1. Oldjuk meg az egész számok halmazán a következő egyenletrendszert:

$$x^2 = y^2 + z^2 + 1, \quad (1)$$

$$x = y + z - 3. \quad (2)$$

2. Az AB szakasz A csúcshoz közelebbi harmadolópontja H . Az AHC és HBD szabályos háromszögek az AB egyenes azonos oldalán helyezkednek el. AD és HC metszéspontja P , BC és HD metszéspontja Q , AD és BC metszéspontja M . Határozzuk meg a $PQ : AB$ arány értékét, és bizonyítsuk be, hogy az M, P, H, Q pontok egy körön vannak.

3. Legyen x tetszőleges pozitív egész szám, és jelölje $f(x)$ az x szám és x számjegyei összegének különbségét, ahol $f(x) = 0$, ha az x szám egyjegyű. Oldjuk meg az $f(f(f(x))) = 9$ egyenletet!

4. Bizonyítsuk be, hogy a

$$(\sqrt{2} - 1)^{2006} = \sqrt{m} - \sqrt{m-1}$$

egyenlet megoldható a pozitív egész számok halmazán!

5. Adott $2n + 3$ pont a síkon úgy, hogy nincs 3 egy egyenesen, és nincs 4 egy körön. Bizonyítsa be, hogy mindig létezik egy k kör, ami pontosan 3 ponton megy keresztül, és n pont van a kör belsejében és n a körön kívül!

Második (döntő) forduló

1. Az AB átfogójú derékszögű háromszögben $AC > BC$. A háromszög köréírt körét a C csúcsból induló magasságvonal az E , míg a C -ből induló belső

szögfelező a D pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy a $BCDE$ négyszög területe megegyezik az ABC háromszög területével.

2. Definiáljuk az x_i sorozatot a következőképpen:

$$\begin{aligned}x_1 &= 1, \\x_{k+1} &= x_k^2 + x_k, \quad k \geq 1, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Bizonyítsuk be, hogy az

$$S = \frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \frac{1}{1+x_3} + \dots + \frac{1}{1+x_{2006}}$$

összeg 1-nél kisebb!

3. Bizonyítsuk be, hogy az egységnyi oldalú $ABCD$ négyzet belsejében végtelen sok olyan P pont van, amelyre igaz, hogy a $\frac{PB}{PA}$, $\frac{PC}{PA}$, $\frac{PD}{PA}$ arányok mindegyike racionális szám.