## KEZDŐK
### Első forduló
### Mindhárom kategória

**1.** Oldja meg a következő egyenelőtlenséget a valós számok halmazán:

$$\left|\frac{x+1}{x}\right| > p,$$

ahol $p$ valós paramétert jelent! (6 pont)

**2.** Határozza meg azokat a (pozitív) $p$ prímszámokat, amelyekre $p^2+12p+2$ is prímszám! (6 pont)

**3.** Igazolja, hogy ha egy téglatest összes élének mérőszámát összeadjuk és ezt az összeget a felszínének a mérőszámával megszorozzuk, akkor a térfogata mérőszámának negyvenszeresénél nagyobb értéket kapunk! (8 pont)

**4.** Kössük össze az $ABCD$ négyzet $A$ csúcsát a négyzet belsejében fekvő $E$ ponttal, amelyre $AB = BE$. Jelölje a $CE$ szakasz felezőmerőlegesének és az $AE$ egyenesnek a metszéspontját $P$. Igazolja, hogy $P$ illeszkedik a négyzet körülírt körére! (10 pont)

**5.** Igazolja a következő egyenlőtlenséget (ahol a nevező mindig 10-zel nő)!

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{13}+\frac{1}{23}+\ldots+\frac{1}{2003} > \frac{2}{3} \qquad \text{(10 pont)}$$

# Második (döntő) forduló

## II. kategória: Általános matematika tantervű gimnáziumok

**1.** Mennyi az alábbi kifejezés legkisebb értéke, ha $x$ és $y$ valós számok:

$$2x^2 - xy + y^2 + 2x + 3y.$$

**2.** Az $ABC$ háromszög $AB$ oldalával párhuzamos középvonalának egyenesét az $A$ csúcsból kiinduló belső szögfelezője az $M$, a $B$ csúcsból kiinduló belső szögfelezője az $N$ pontban metszi. Ugyanígy kapjuk a másik két oldalból kiindulva a $KL$ és $PQ$ szakaszt. Mutassa meg, hogy:

$$2(MN + KL + PQ) = AB + AC + BC.$$

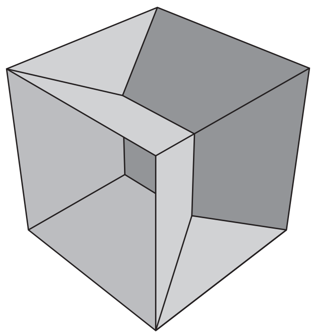
**3.** Bizonyítsa be, hogy van olyan szám, amely a tízes számrendszerben 987654321-re végződik és osztható 2003-mal!

## III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumok

**1.** Bizonyítsa be, hogy van olyan szám, amely a tízes számrendszerben 987654321-re végződik és osztható 2003-mal!

**2.** Adott egy $10 \times 10 \times 10$-es kockarács. Három ember ($A$, $B$ és $C$) a következő játékot játssza. Felváltva ($A, B, C, A, B, C, \dots$) elhelyeznek a kockarácsban egy-egy $1 \times 1 \times 10$-es rudat, három egymásra merőleges irányból. (Mindegyikőjük csak a hozzá tartozó irányból helyezheti el a rúdját.) A rudakat teljesen be kell tolni, nem ütközhetnek egymással, legfeljebb érintkezhetnek. Hány (teljes) körből állhat a leghosszabb játék?

**3.** A tapasztalat azt mutatja, hogy ha egy drótból készült kockát szappanos vízbe mártunk, egy, az alábbi ábrán szemléltetett szappanhártya alakzat keletkezik, mely egy négyzetből, négy egybevágó egyenlő szárú háromszögből és nyolc egybevágó szimmetrikus trapézból áll. Mutassa meg, hogy az így létrejött hártya felszíne – minden hártyaidomnak csak az egyik oldalát számítva – legfeljebb a tömörnek képzelt kocka felszínének $\frac{11}{12}$-e. Javítható-e ez a becslés?



# HALADÓK

## II. kategória: Általános matematika tantervű gimnáziumok

### Első (iskolai) forduló

**1.** Melyek azok a racionális számokból álló $(x; y)$ számpárok, amelyekre igaz, hogy $\left(x + \frac{1}{y}\right) \cdot \left(y + \frac{1}{x}\right)$ értéke nullától különböző egész szám?

**2.** Az $ABC$ háromszög $BC$ oldalának $C$-hez közelebbi harmadolópontja $H$, $AC$ oldalának $C$-hez közelebbi negyedelőpontja pedig $N$. Az $AH$ és $BN$ szakasz a $P$ pontban metszi egymást. Mekkora a $PHCN$ négyszög és az $ABP$ háromszög területének aránya?

**3.** Négy számról, $a$-ról, $b$-ről, $c$-ről és $d$-ről tudjuk, hogy a belőlük képezhető hat darab kéttagú összeg közül három racionális, három pedig irracionális értékű.

$A$) Racionális szám-e az $a+b+c+d$ összeg?

$B$) Hány racionális szám lehet a négy szám között?

**4.** Az $ABCD$ trapéz $AD$ szára merőleges az $AB$ és $CD$ alapra. A $BC$ átmérőjű $k$ kör az $AD$ oldalt az $E$ pontban érinti. Igazoljuk, hogy $BE+CE \leq \sqrt{2}(AB+CD)$.

**5.** Mely pozitív egész $n$ értékekre igaz, hogy $2^n+65$ értéke négyzetszám?

## Második forduló

**1.** Melyik az a háromjegyű szám, amelyre igaz, hogy az első számjegyét letörölve, majd ezt a számjegyet a megmaradó két számjegy után írva olyan háromjegyű számot kapunk, melynek négyzetgyöke 9-cel kisebb az eredeti szám négyzetgyökénél.

**2.** Bármely derékszögű háromszögbe két olyan négyzet írható, amelynek csúcsai a háromszög kerületén vannak. Legfeljebb mekkora lehet a nagyobb és a kisebb négyzet területének aránya?

**3.** Legyen $g(x)$ egész együtthatós polinom.

Bizonyítsuk be, hogy az alábbi polinomnak nincs egész gyöke:

$$6(x^2+1)^2+5g(x)\cdot(x^2+1)-21\cdot g^2(x).$$

**4.** Egy $2n$-szög mindegyik csúcsára a $-1$ vagy 1 számot írtuk rá.

Egy lépésben bármelyik $(n+1)$ darab csúcsra írt szám mindegyikének megváltoztathatjuk az előjelét.

Milyen $n$ érték esetén, mely kezdőhelyzetből indulva érhető el a megengedett lépés tetszőleges számú alkalmazásával, hogy mindegyik csúcshoz az 1-es szám tartozzon?

## Harmadik (döntő) forduló

**1.** Határozzuk meg azokat az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitív számokat, amelyekre teljesülnek az

$$x_1+x_2+\ldots+x_n=3, \qquad \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}=3$$

összefüggések.

**2.** Az $ABC$ háromszög tetszőleges belső pontjából merőlegeseket állítunk az oldalakra. A kapott három talppont által meghatározott háromszög köréírt köre az eredeti háromszög oldalait újabb három pontban metszi: az $AB$ oldalt $P$-ben, a $BC$ oldalt $Q$-ban, az $AC$ oldalt $R$-ben.

Bizonyítsuk be, hogy a $P$-n átmenő $AB$-re merőleges egyenes, a $Q$-n átmenő $BC$-re merőleges egyenes és az $R$ ponton átmenő $AC$-re merőleges egyenes közös pontban metszi egymást.

**3.** Egy síkbeli terepen hat város között három egyenes út vezet. Az első $A_1$-ből $B_1$-be, a második $A_2$-ből $B_2$-be, a harmadik pedig $A_3$-ból $B_3$-ba. $A_i$-ből $(i = 1, 2, 3)$ egyszerre indul el az $f_i$ futár $(i = 1, 2, 3)$ a $B_i$ városba $(i = 1, 2, 3)$, ahol mindegyik futár állandó sebességgel halad.

A közös indulás után $a$ óra elteltével $f_1$ és $f_2$ találkozik, majd ezután $b$ óra elteltével $f_1$ és $f_3$ találkozik, ismét $a$ óra elteltével $f_2$ és $f_3$ halad el egymás mellett, végül újabb $b$ óra elteltével mindhárman egyszerre érnek célba.

Milyen messze lehet $B_1$ $B_3$-tól, ha $a > 0$, $b > 0$ és $A_1A_2 = 1$ km?

## III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumok

### Első (iskolai) forduló

**1.** Határozzuk meg azokat a $p$, $q$, $r$ és $n$ számokat, amelyekre $p^n + q^2 = r^2$ teljesül, ahol $p$, $q$, $r$ pozitív prímszám, $n$ pedig pozitív egész szám.

**2.** Az $ABC$ egyenlő szárú derékszögű háromszög $AB$ átfogója 2 egység hosszú. Az átfogó mely $P$ pontjára igaz, hogy a

a) $3PA + 6PB + 5PC$ összeg értéke minimális?

b) $3PA + 6PB + 5PC$ összeg értéke maximális?

**3.** Az $ABCD$ húrnégyszögben $AB < AD$.

Forgassuk el a húrnégyszöget az $A$ csúcs körül úgy, hogy a kapott $AB'C'D'$ négyszög $B'C'$ oldalegyenesére illeszkedjen az eredeti négyszög $C$ csúcsa.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor a $B'D'$ átló egyenese átmegy a $D$ csúcson!

**4.** Egy táblára felírtuk a pozitív egész számokat növekvő sorrendben 1-től $3n$-ig. Jancsi a számok közül ezután $n$ darabot letöröl (saját belátása szerint). Majd Juliska jön, és a megmaradt számok közül aláhúz $n$ darabot. Bizonyítsuk be, hogy Juliska mindig el tudja érni azt, hogy az aláhúzott számok balról jobbra olvasva olyan sorozatot adjanak, amely páratlan számmal kezdődik és felváltva páros, ill. páratlan elemei vannak.

### Második (döntő) forduló

**1.** A 2003-ad fokú $f(x) = a_{2003}x^{2003} + a_{2002}x^{2002} + \ldots + a_1x + a_0$ polinomhoz található olyan pozitív egész $p$, $q$ és $r$, amelyekre $p < q < r$ és $f(p) = q$, $f(q) = r$ és $f(r) = p$.

Bizonyítsuk be, hogy $f(x)$ összes együtthatója nem lehet egész szám.

**2.** Az $ABCDE$ ötszögbe az oldalakat érintő kör írható. A $B$, $C$, $D$, $E$ csúcsnál lévő szögek egyenlők. Az ötszög beírt köre a $P$ pontban érinti az $AE$ oldalt. Bizonyítsuk be, hogy az $AD$, $PC$ és $EB$ egyenesek egy ponton mennek át.

**3.** Egy országban, sík terepen hat város között három egyenes út vezet. Az első $A_1$-ből $B_1$-be, a második $A_2$-ből $B_2$-be, a harmadik pedig $A_3$-ból $B_3$-ba.

$A_i$-ből minden reggel 8 órakor elindul egy $f_i$ futár, aki állandó sebességgel haladva pontosan délben érkezik $B_i$-be ($i = 1, 2, 3$).

Az út során $f_1$ és $f_2$ 9 órakor találkozik, $f_1$ és $f_3$ 10 órakor, $f_2$ és $f_3$ pedig 11 órakor.

Milyen hosszú a $B_1B_3$ távolság, ha $A_1$ és $A_2$ 1 km-re, $A_2$ és $A_3$ pedig 3 km-re fekszik egymástól?