

KEZDŐK
Első forduló
Mindkét kategória

1. Oldja meg a következő egyenlőtlenséget a valós számok halmazán!

$$\frac{2x}{|x-3|-5} + \frac{1}{x+2} \geq 1$$

(6 pont)

2. Az ABC derékszögű háromszög 3 egység hosszúságú AB átfogójának harmadoló pontjai E és G . Számítsa ki a $CE^2 + CG^2$ összeg pontos értékét!

(6 pont)

3. Hány olyan 10^6 -nál kisebb természetes szám van, amely számjegyeinek összege páros és a rákövetkező természetes szám számjegyeinek összege is páros?

(8 pont)

4. Egy hegyesszögű háromszögben a szokásos jelölésekkel $ac = b^2 - a^2$. Bizonyítsa be, hogy $\beta = 2\alpha$!

(10 pont)

5. Mely m és n 1-nél nagyobb egész számokra teljesül, hogy m osztója n -nek és $m^n \leq n^m$?

(10 pont)

Második (döntő) forduló

**I. kategória: Általános tanterv szerint tanuló
szakközépiskolások és gimnáziumi tanulók**

1. Mi a szükséges és elégséges feltétele, hogy egy konvex $ABCD$ négyszög AB és CD oldalának felezőpontjai által meghatározott szakasz felezze a négyszög területét?

2. Mely x , y és z számokra teljesül az alábbi egyenlőség?

$$4x^3 + 2y^3 + z^3 = 2002 \cdot xyz$$

3. Mutassa meg, hogy egy kocka csúcsainak halmazából kiválasztható néhány 4-elemű részhalmaz úgy, hogy a kocka bármely három csúcsát a kiválasztott 4-elemű részhalmazok közül pontosan egy tartalmazza!

**II. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi
tanulók**

1. Jelöljük az ABC háromszög körülírt körén az A -t nem tartalmazó BC ív felezőpontját D -vel! Legyen D tükörképe a BC egyenesre E , az EA szakasz felezőpontja pedig K . Igazolja, hogy K és a háromszög oldalfelező pontjai egy körön helyezkednek el!

2. Mely x és y egész számokra teljesül az alábbi egyenlőség?

$$x^2y^2 - x^2y - xy^2 + xy + x + y = 2$$

3. Legyen $n \geq 6$. Bizonyítsa be, hogy ha egy n elemű halmazból kiválasztható néhány 5-elemű részhalmaz úgy, hogy az n elemű halmaz minden 3-elemű részhalmazát a kiválasztott 5-elemű részhalmazok közül pontosan egy tartalmazza, akkor $n \geq 16$.

HALADÓK

I. kategória: Szakközépiskolák

Első (iskolai) forduló

1. Bizonyítsuk be, hogy minden $0 < a < 1$ számra

$$\frac{2000^2}{1-a} + \frac{1}{a} \geq 2001^2!$$

Milyen a -ra áll fenn egyenlőség?

2. Az ABC háromszög AB oldalának B -hez közelebbi harmadolópontja H , a BC oldal B -hez legközelebbi negyedelőpontja N_1 , C -hez legközelebbi negyedelőpontja N_2 . A CA oldal felezőpontja F .

Bizonyítsa be, hogy az FHN_1 és az FHN_2 háromszögek területének összege az ABC háromszög területének felével egyenlő!

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

$$(x^2 + y^2)^3 = (x^3 - y^3)^2$$

egyenletet!

4. Bizonyítsuk be, hogy 2001 egymást követő pozitív egész szám között mindig van olyan, amelyre igaz, hogy a számjegyeinek összege osztható 27-tel!

5. Egy 20×25 -ös téglalapban elhelyeztünk tetszőlegesen 120 db egységnyi oldalú négyzetet. Bizonyítsuk be, hogy még egy olyan egységnyi átmérőjű kör is elfér a téglalapban, amelynek nincs közös belső pontja a négyzetekkel! (Négyzetben most négyzetlapot, körön pedig körlapot értünk.)

Második forduló

1. Bizonyítsuk be, hogy

$$1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2001 + 2002 \cdot 2003 \cdot \dots \cdot 4002$$

osztható 4003-mal!

2. Oldjuk meg a természetes számok halmazán a $\sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = 10$ egyenletet!

3. Az a és b befogójú derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága az átfogó negyedrésze. Mekkora ekkor $\left(\frac{a}{b}\right)^6 + \left(\frac{b}{a}\right)^6$ értéke?

4. Egy 1 egység széles egyenes vonalzóval egy síkon szerkeszthetünk. Más segédeszközünk – ceruzán kívül – nincs. A szerkesztés során a következő lépések hajthatók végre:

a) tetszőleges számú pontot felvehetünk az adott síkon,

b) két felvett ponton át egyenes húzható a vonalzóval,

c) bármely megrajzolt egyenessel attól egységnyi távolságra lévő párhuzamos egyenes húzható.

Szerkesszünk $\sqrt{34}$ egység hosszú szakaszt a megengedett szerkesztési lépések alapján!

Harmadik (döntő) forduló

1. Az a, b, c, d egész számokra $a < b < c < d$ teljesül. Tudjuk, hogy az

$$E = (b-a)(b+c+d)(c+a+d) + (c-b)(c+a+d)(a+b+d) + (a-c)(a+b+d)(b+c+d)$$

kifejezés értéke prímszám. Mi ennek a prímszámnak az értéke?

2. Az ABC derékszögű háromszög BC befogójának D pontjában az AD szakaszra állított merőleges az AB átfogót az E pontban metszi. Az E pont BC -re eső merőleges vetülete az F pont. Bizonyítsuk be, hogy a CF szakasz hossza akkor minimális, ha a D pont rajta van az A csúcsból induló szögfelezőn.

3. a) Bizonyítsuk be, hogy végtelen sok olyan k egész szám van, amelyre k és $k+1$ is két pozitív egész szám négyzetének összegeként írható fel.

b) Igazoljuk azt is, hogy nem létezik olyan k egész szám, amelyre a $k, k+1, k+2$ és $k+3$ számok mindegyike felbontható két négyzetszám összegére.

II. kategória: Általános matematika tantervű gimnáziumok

Első (iskolai) forduló

1. Bizonyítsuk be, hogy ha az x és y valós számokra igaz, hogy $x + y + xy$ racionális szám, $x^4 + y^4$ pedig irracionális szám, akkor xy csak irracionális szám lehet.

2. Az O középpontú egységnyi sugarú körbe írt $ABCD$ trapézban $\sphericalangle BOC = \sphericalangle AOD = 120^\circ$, ahol BC és AD a trapéz szárai. Mutassuk meg, hogy a trapéz területe legfeljebb $\sqrt{3}$ területegység értékű!

3. Adott a valós számok halmazán értelmezett $x \mapsto x^2 - 4|x - 1| - p$ függvény, ahol p valós paraméter.

Határozzuk meg p értékét úgy, hogy x -nek pontosan 3 különböző értékére legyen az adott függvény értéke 1.

4. Bizonyítsuk be, hogy 2001 egymást követő pozitív egész szám között mindig van olyan, amelyre igaz, hogy a számjegyeinek összege osztható 27-tel!

5. Egy 20×25 -ös téglalapban elhelyeztünk tetszőlegesen 120 db egységnyi oldalú négyzetet. Bizonyítsuk be, hogy még egy olyan egységnyi átmérőjű kör is elfér a téglalapban, amelynek nincs közös belső pontja a négyzetekkel! (Négyzeten most négyzetlapot, körön pedig körlapot értünk.)

Második forduló

1. Oldjuk meg az egész számok körében az

$$ab + cd = -1$$

$$ac + bd = -1$$

$$ad + bc = -1$$

egyenletrendszert!

2. Az a és b befogójú derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága az átfogó negyedrésze. Mekkora ekkor $\left(\frac{a}{b}\right)^6 + \left(\frac{b}{a}\right)^6$ értéke?

3. Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c valós számokra teljesül az $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ összefüggés, akkor

$$\frac{1}{a^{1001}} + \frac{1}{b^{1001}} + \frac{1}{c^{1001}} = \frac{1}{a^{1001} + b^{1001} + c^{1001}}.$$

4. Az $ABCD$ konvex négyszög AC és BD átlója merőleges egymásra. Az AB oldal K felezőpontjából állítsunk merőlegest DC oldalegyenesre. Ennek talppontja legyen P . Az AD oldal L felezőpontjából a BC oldalegyenesre állított merőleges talppontja legyen Q . Bizonyítsuk be, hogy a KP és LQ egyenesek az AC átló egyenesén metszik egymást!

Harmadik (döntő) forduló

1. Hány olyan pozitív egész tízes számrendszerbeli n -jegyű szám van, amelyek számjegyjösszege $n^3 - 40$, ahol n pozitív egész szám?

2. Az ABC háromszögben $BC < CA < AB$. A BC oldal felező merőlegese a P , az AC oldal felező merőlegese a Q pontban metszi a C csúcsból induló magasság egyenesét. Mekkora a háromszög legnagyobb szöge, ha $4CP \cdot CQ = AB^2$?

3. Tekintsük az $1, 2, 3, \dots, 2002$ számsorozatot! Ezt a sorozatot átrendezhetjük a következő módon: egy lépésben a sorozat utolsó tagját előbbre helyezhetjük (akárhányadik helyre az $1., 2., 3., \dots, 2002.$ sorszámú hely közül) azzal a megszorítással, hogy az előrébb helyezett tag nem előzhet meg nála nagyobb számot. A kapott új sorozatra ismét alkalmazható az előbb leírt lépés, egészen addig, amíg lehetséges. Bizonyítsuk be, hogy bármely lépés után olyan sorozatot kapunk, amelyben a $(2k - 1)$ -edik és a $2k$ -adik tag közül az egyik páros, a másik pedig páratlan szám, bármely $1 \leq k \leq 1001$ esetén.

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumok

Első (iskolai) forduló

1. Bizonyítsuk be, hogy ha az a, b, c valós számokra teljesül az $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{a+b+c}$ összefüggés, akkor

$$\frac{1}{a^{1001}} + \frac{1}{b^{1001}} + \frac{1}{c^{1001}} = \frac{1}{a^{1001} + b^{1001} + c^{1001}}.$$

2. Az a oldalú N négyzetet a középpontja körül elforgatva az N' négyzetet kapjuk. A két négyzet közös része olyan nyolcszög, amelynek mindegyik oldala b hosszú.

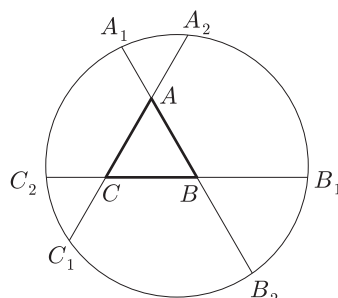
a) Fejezzük ki a nyolcszög területét a -val és b -vel!

b) Ha az N és N' négyzet metszetének területe t , uniójának területe pedig

T , akkor igazoljuk, hogy $\sqrt{t \cdot T} < a^2 < \sqrt{\frac{t^2 + T^2}{2}}$.

3.

A k kör belsejében levő ABC szabályos háromszög oldalegyenesei a k kört az $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ pontokban metszik a következő betűzés szerint: az AB oldalegyenes metszéspontjai a körrel A_1 és B_2 . Hasonlóan: a BC egyenes metszetei a körrel B_1 , illetve C_2 , és a CA egyenes metszetei a körrel C_1 , illetve A_2 az ábrá-



nak megfelelően.

Bizonyítsuk be, hogy

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 = AA_2 + BB_2 + CC_2.$$

4. 121 darab pozitív egész számról tudjuk, hogy összegük 360. Bizonyítsuk be, hogy az adott 121 darab pozitív egész szám közül ki lehet néhányat választani úgy, hogy a kiválasztott számok összege 120 legyen.

Második (döntő) forduló

1. Bizonyítsuk be, hogy az összes olyan pozitív egész alapú számrendszerben, amelyben az \overline{abc} és a \overline{cba} pozitív egész szám hányadosa 2, teljesül az $a + c = b$ összefüggés.

2. Adott egy $2k + 1$ oldalú szabályos sokszög, melynek belsejében vagy határán felvesszünk egy P pontot. P -nek a sokszög csúcsaitól mért távolságát jelölje (nagyság szerinti sorrendben) $d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_{2k+1}$. Milyen P pont esetén lesz d_{k+1} maximális?

3. Van N darab chip, amelyek képesek egymás tesztelésére a következő módon: ha kettőt összekapcsolunk, akkor mindkettő kijelzi a másik chipről, hogy jó-e vagy hibás. A jó chip mindig helyesen válaszol, a hibás chip véletlenszerű eredményt ad. Tudjuk, hogy az összes chipnek több mint a fele jó. Lehetséges-e N -nél kevesebb teszt végrehajtásával kiválasztani egy jó chipet?