KEZDŐK
Első forduló

Mindhárom kategória

1. Egy kocka minden lapjára egy-egy pozitív egész számot írtunk. Ezek közül az ábrán feltüntettünk három számot. Tudjuk, hogy a szemközti lapokon levő számok összege egyenlő, és a fel nem tüntetett számok mindegyike prímszám. (ld. *I.1 ábra*). *Melyek ezek a számok?* *(6 pont)*

2. *Az A halmazt a páros természetes számok négyzeténél eggyel nagyobb számok, a B halmazt a négyzetszámok háromszorosai alkotják. Határozza meg $A \cap B$-t! (Az A és B halmazok közös elemeiből álló halmazt jelöljük $A \cap B$-vel.) (6 pont)*

3. *Az $ABCD$ téglalap oldalai $AB = 13$ cm és $BC = 5$ cm. Az AB oldalegyenesen milyen távolságra lehet az A ponttól egy olyan pont, amelyből a DA és DC szakaszok egyenlő szögben látszanak? (Hány ilyen pont van?) (8 pont)*

4. *Igaz-e, hogy négy irracionális szám között mindig van három olyan, amelyek összege is irracionális szám? (10 pont)*

5. *Az $ABCD$ négyzet területe 60 cm^2. A BC és CD oldalak felezőpontjai E, illetve F. Az AE és BF szakaszok metszéspontja G, az AC és BF szakaszoké H. (ld. I.5 ábra). Mekkora a $CHGE$ négyszög területe? (10 pont)*

Második (döntő) forduló

I. kategória: Szakközépiskolások

1. *Bizonyítsa be, hogy az*

$$1^{2001} + 2^{2001} + \cdots + 1999^{2001} + 2000^{2001}$$

összeg osztható 2001-gyel!

2. *Egy 10 cm befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszögbe két olyan egyenlő sugarú kört írunk, amelyek érintik egymást és az átfogót, illetve egy-egy befogót. Mekkora a sugár pontos értéke?*

3. *Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:*

$$\left\{\frac{1}{2}x\right\} = \frac{1}{16}x + \frac{1}{32},$$

ahol $\{z\}$ a z valós szám törtrészét jelenti!

II. kategória: Általános matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. *Azonos az 1. kategória 3. feladatával.*

2. *Melyek azok az $(x; y)$ egész számokból álló számpárok, amelyekre teljesül az alábbi egyenlőség:*

$$5x^2 + 2y^2 - 2xy + 4x - 4y = 5?$$

3. *Az ABC háromszög területe t, beírt körének sugara r. Az A csúcsból induló két oldalt és a beírt kört kívülről érintő kör sugara r_a, a B csúcsból induló két oldalt és a beírt kört kívülről érintő kör sugara r_b, a C csúcsból induló két oldalt és a beírt kört kívülről érintő kör sugara r_c. A beírt kör és a másik három kör közös belső érintője egy-egy kis háromszöget vág le az ABC háromszögből, amelyek területe rendre t_a, t_b, t_c. Igazolja, hogy*

$$\frac{t_a}{r_a} + \frac{t_b}{r_b} + \frac{t_c}{r_c} = \frac{t}{r}!$$

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. *Határozza meg az $x^4 - 15x^2 - 18x$ kifejezés legkisebb értékét, ha x valós szám!*

2. *Azonos a 2. kategória 3. feladatával.*

3. *Mi lehet a pozitív egész értékű szigorúan monoton növekvő sorozat, ha $a_2 = 2$, továbbá relatív prím m és n esetén $a_{m \cdot n} = a_m \cdot a_n$?*

HALADÓK
Első forduló

I. kategória: Szakközépiskolai tanulók

1. *Határozza meg az összes olyan pozitív egész számot, amelyre*

$$1! + 2! + 3! + \cdots + n!$$

egy egész szám négyzete! ($n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n$, azaz 1-től n-ig az egész számok szorzata, ha $n > 1$, egész és $1! = 1$.)

2. *Bizonyítsuk be, hogy ha tetszőleges négy egymást követő pozitív egész szám szorzatához*

a) 2000-et hozzáadunk,
b) 2001-et hozzáadunk,

akkor az eredmény sem prímszám, sem pedig négyzetszám nem lehet!

3. *Legyen e az ABC háromszög S súlypontján áthaladó, a csúcsok egyikét sem tartalmazó egyenes. Bizonyítsuk be, hogy az e egyenes azonos oldalán lévő csúcsok e-től mért távolságainak összege megegyezik a harmadik csúcsnak az e egyenestől mért távolságával!*

4. *Határozza meg a k paraméter értékét úgy, hogy a*

$$4x^4 - (4k+13)x^2 + (9k+9) = 0$$

egyenlet valós gyökeit növekvő sorrendben felírva mindhárom szomszédos gyökpár különbsége ugyanannyi legyen!

5. *Egy háromszög alapú gúla éleire olyan pozitív egész számokat írtunk, amelyekre igaz, hogy bármelyik csúcsba futó három élre írt számok összege ugyanakkora. Hányféle lehet a gúla éleire írt számok összege, ha az élekre írt számok szorzata 3600?*

II. kategória: Általános tantervű gimnáziumi tanulók

1. *Azonos az I. kategória 2. feladatával.*

2. *Azonos az I. kategória 3. feladatával.*

3. *Oldjuk meg a valós számok körében a következő egyenletet:*

$$\frac{1+\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}+\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{x+1}\left(\frac{1+\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}-\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}\right)+\sqrt{x-1}.$$

4. *Azonos az I. kategória 5. feladatával.*

5. *Melyek azok a nullától különböző a, b, c számjegyek, amelyekre minden pozitív egész n esetén teljesül, hogy az n-jegyű $\overline{aa\ldots a}$ szám négyzetének és az n-jegyű $\overline{bb\ldots b}$ számnak az összege egyenlő a $2n$-jegyű $\overline{cc\ldots c}$ számmal?*

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. *Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges háromszögre*

$$18Rr \le ab + ac + bc,$$

ahol R a köréírt, r a beírt kör sugara, továbbá az oldalak hossza a, b és c.

2. *A 2000 egység oldalú ABC szabályos háromszöget az oldalakkal párhuzamos egyenesekkel egységoldalú szabályos háromszögekre daraboltuk. Az így keletkezett 2000^2 db kis háromszög minden csúcsa mellé egy-egy valós számot írtunk. Az A, B, C csúcsok mellé rendre az a, b, c számot írtuk, a többire pedig* *úgy írtunk számokat, hogy minden olyan rombuszban, amely két, közös oldallal rendelkező kis háromszögből áll, a szemköztes csúcsok mellé írt számok összege egyenlő. Például: $p+r=q+s$ (ld. III.2 ábra)*

Határozzuk meg az eredeti ABC háromszög kerületére írt számok összegét!

3. *Egy háromszög oldalainak mérőszáma egész szám. A háromszögbe írható kör sugara egységnyi hosszúságú. Határozzuk meg az oldalak hosszát!*

4. *Adott n pont a síkon úgy, hogy semelyik 3 sincs egy egyenesen. Bizonyítsuk be, hogy összeköthetők egy önmagát nem metsző zárt töröttvonallal!*

Második forduló

I. kategória: Szakközépiskolai tanulók

1. *Bizonyítsuk be, hogy a derékszögű háromszög területének mérőszáma megegyezik azon két szakasz hosszának szorzatával, amelyre a háromszögbe írható kör érintési pontja bontja az átfogót!*

2. *Oldjuk meg a valós számok halmazán a*

$$2\sqrt{|2x-5|}-\sqrt[4]{(2x-5)(x-2)}-\sqrt{|x-2|}\leq 0$$

egyenlőtlenséget!

3. *Egy konvex négyszög egyik középvonala felezi a területét. Bizonyítsuk be, hogy a négyszög trapéz!*

4. *Bizonyítsa be, hogy nem létezik olyan konvex nyolcszög, amelynek szögei egyenlők, oldalai pedig valamilyen sorrendben 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 és 8 egység hosszúak!*

II. kategória: Általános tantervű gimnáziumi tanulók

1. *Tekintsük az $f(x)=x^2-\dfrac{a^2-1}{a}x-1$ ($a\neq 0$) függvényt, ahol $x\in\mathbf{R}$. A függvény grafikonja az y tengelyt egy, az x tengelyt két pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy a három metszéspont által meghatározott háromszög területe nagyobb vagy egyenlő, mint 1.*

2. *Legyen X egy adott AB szakasz belső pontja. Vegyük fel a szakasz ugyanazon oldalára az APX és XQB szabályos háromszögeket! Legyen M és N az AQ, illetve BP szakasz felezőpontja!*

Bizonyítsuk be, hogy XMN háromszög szabályos, továbbá határozzuk meg azt az X pontot, amelyre az MN szakasz hossza minimális!

3. *Jelölje $s(n)$ az n szám 10-es számrendszerbeli alakjában a számjegyek szorzatát. Mennyi*

$$s(2000)+s(2001)+s(2002)+\cdots+s(3000)?$$

4. *Egy asztalon 2000 darab pénzérme van, mindegyik a „fej” oldalával felfelé fordítva.*

Egy-egy alkalommal pontosan k darab érmét a másik oldalára fordíthatunk.

Bizonyítsuk be, hogy az adott művelet ismétlésével elérhető bármely adott k szám esetén ($1 \leq k \leq 2000$), hogy a 2000 érme „írás” oldalával felfelé legyen fordítva!

Harmadik (döntő) forduló

I. kategória: Szakközépiskolások

1. *Az x, y, z egész számokra teljesül, hogy*

$$(x-y)(y-z)(z-x) = x+y+z.$$

Bizonyítsuk be, hogy ekkor az $x+y+z$ összeg osztható 54-gyel!

2. *Az ABC hegyesszögű háromszög AB oldalának tetszőleges belső pontja az X pont. Az AXC és CXB háromszögek beírt körének az AB egyenestől különböző közös külső érintője a CX szakaszt az Y pontban metszi.*

Bizonyítsuk be, hogy a CY szakasz hossza független az X pont megválasztásától!

3. *Bizonyítsuk be, hogy bármely 1-nél nagyobb négyzetszám 2-es számrendszerben felírt alakja legalább 2 darab 0 számjegyet tartalmaz!*

II. kategória: Általános tantervű gimnáziumi tanulók

1. *Igazoljuk, hogy ha az $\{a_n\}$ sorozat első tagja egy 0-tól különböző egész szám, akkor $a_{n+1} = a_n^2 + a_n - 1$ esetén ($n \in \mathbf{Z}^+$) az $\dfrac{a_n}{a_k}$ tört nem egyszerűsíthető, ahol n és k egymástól különböző pozitív egész szám!*

2. *Legyen az ABC hegyesszögű háromszög A-ból induló magasságvonalának talppontja T. Az AT szakasz mint átmérő fölé írt körnek az AB, illetve AC oldallal való, A-tól különböző metszéspontja legyen D, illetve E. Bizonyítsuk be, hogy az ABC háromszög köré írt körének középpontja az ADE háromszög A-ból induló magasságvonalának egyenesén van!*

3. *Az a és b befogójú derékszögű háromszög beírt körének sugara r. Ha az átfogóhoz tartozó súlyvonal a beírt körből r hosszúságú húrt metsz ki, akkor mekkora az $\dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{a}$ értéke?*

III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. *Az ABC hegyesszögű háromszög AB oldalának tetszőleges belső pontja az X pont. Az AXC és CXB háromszögek beírt körének az AB egyenestől különböző közös külső érintője a CX szakaszt az Y pontban metszi.*

Mely X pont esetén lesz az AYB háromszög területe minimális?

2. *Legyen a $H = \{n,\ n+1,\ n+2,\ \ldots,\ n+4096\}$, ahol n páratlan természetes szám. Bizonyítandó, hogy H elemei két diszjunkt A és B halmazba oszthatók úgy, hogy egyszerre teljesül a következő két feltétel:*

a) A elemszáma 2000,

b) A és B elemei felírhatók egy-egy kör kerületére úgy, hogy a szomszédos számok relatív prímek.

3. *2001 darab különböző pozitív egész számról tudjuk, hogy a számok szorzatának pontosan 2000 darab különböző pozitív prímosztója van. Bizonyítsuk be, hogy a 2001 darab szám közül kiválasztható egy vagy több úgy, hogy azok szorzata négyzetszám legyen (vagy az egy kiválasztott szám már maga is négyzetszám)!*