

## Tanulóverseny feladatai

### KEZDŐK

Első forduló1mm

1. Egy farmon több ló van, mint kacsa. A tehenek száma harmada a lovak és kacsák együttes számának. A kacsák és lovak fejei és lábai számának összege 100. Hány tehen van a farmon?

2. Bizonyítsa be, ha egy derékszögű trapéz szemközti oldalainak összege egyenlő, akkor a merőleges szár:  $\frac{2ac}{a+c}$ , ahol az  $a$  és  $c$  a trapéz alapjai.

3. Egy 665 oldalú szabályos sokszög oldala 3 cm. Nagyítsuk ezt a sokszöget a középpontjából úgy, hogy a nagyított és az eredeti oldalak távolsága 1 cm legyen! Bizonyítsa be, hogy a két sokszög területének különbsége több mint  $1998 \text{ cm}^2$ .

4. Ábrázolja közös koordinátarendszerben a valós számok halmazán értelmezett

$$f(x) := ||x + 4| - |x - 4|| \quad \text{és} \quad g(x) = ||x| - 2|$$

helyettesítési értékű függvények grafikonját, és határozza meg azon sokszöget területének összegét, amelyeknek minden oldala hozzátartozik valamelyik függvény grafikonjához.

5. Milyen tulajdonságú  $k, m, n, l$  természetes szám esetén lesz az

$$1^k + 9^m + 9^n + 7^l$$

összeg utolsó számjegye 4?

### Második forduló

#### I. kategória: Szakközépiskolások

1. Egy  $ABC$  háromszög  $BC$  oldalához hozzáírt kör középpontján át húzzunk párhuzamost a  $BC$  oldallal. Metssze ez a párhuzamos az  $AB$  oldalegyenest a  $D$ , az  $AC$  oldalegyenest az  $E$  pontban. Bizonyítsa be, hogy  $DB + CE = DE$ .

2. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet, ahol  $p$  valós paramétert jelent:  $|x + 3| + p \cdot |x - 2| = 5$ . A  $p$  értékétől függően hány megoldása van az egyenletnek?

3. 1998 darab egész szám közül 1997 darab szám négyzetének az összege egyenlő a kimaradó 1998-adik szám négyzetével. Bizonyítsa be, hogy nem lehet mind az 1998 darab szám páratlan.

**II. kategória: Nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók**

1. Megegyezhet-e 1998 darab páratlan egész szám egyikének a négyzete a többi 1997 darab szám négyzetének az összegével?

2. Bizonyítsa be, hogy egy derékszögű háromszögben a beírható kör sugarának és az átfogóhoz tartozó magasságnak a hányadosa 0,4 és 0,5 között van.

3. Bizonyítsa be, hogy nincs olyan minden valós számra értelmezett  $f$  függvény, amelyre  $f(x^2 + x + 2) + f(x^2 - x + 2) = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 3x + 4$  teljesül minden valós  $x$  értékre.

**III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók**

1. Mekkora lehet egy derékszögű háromszögben a beírható kör sugarának és az átfogóhoz tartozó magasságának a hányadosa?

2. Az  $a, b, c, n, M, N$  pozitív számokról a következőket tudjuk:  $b = a + c$ ,  $n \geq 3$ ,  $N$  (a tízes számrendszerben)  $n$  jegyű,  $N$  első jegye  $a$ , utolsó jegye  $c$ , a többi  $n - 2$  jegye  $b$ ;  $N$  jegyeit fordított sorrendben leírva  $M$ -et kapjuk, továbbá  $M - nN$  olyan  $n - 1$  jegyű pozitív egész szám, amelynek minden jegye  $b$ . Mi lehet az  $N$ ?

3. Adjon meg olyan minden valós számra értelmezett  $f$  és  $g$ , legalább másodfokú polinom függvényeket, amelyekhez nem létezik olyan  $h : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  függvény, hogy

$$h(f(x)) + h(g(x)) = g(f(x))$$

minden valós  $x$ -re teljesüljön.

**HALADÓK**  
**Első forduló**

**I. és II. kategória: Szakközépiskolások és nem speciális tantervű gimnáziumi tanulók**

1. Mutassuk meg, hogy ha egy téglalap oldalainak hossza  $a$  és  $a + 1$ , akkor a téglalap szögfelezői által határolt síkidom területe független az  $a$  értékétől.

2. Mely pozitív egész  $n$  számokra osztható  $n^8 - n^2$  504-gyel?

3. Egy derékszögű háromszög egyik befogója egységnyi. A másik befogóhoz és az átfogóhoz tartozó súlyvonalak merőlegesek egymásra. Mekkora a háromszög oldalai?

4. Oldjuk meg az egész számok halmazán a

$$\frac{z-1}{x} + \frac{z+1}{y} = 1, \quad \frac{z+1}{x} - \frac{z-1}{y} = 1$$

egyenletrendszert.

5. Egy szabályos százszög csúcsaihoz tetszés szerint 1-et vagy  $-1$ -et írunk. Egy „lépésben” bármely három egymást követő csúcshoz írt szám előjelét az ellenkezőjére változtathatjuk. (Például az  $1; 1; -1$  hármast a  $-1; -1; 1$  hármásra cserélhetjük.)

a) Elérhető-e ilyen „lépésekkel” tetszőleges kiindulási helyzet esetén, hogy a csúcsokhoz írt 100 szám összege 0 legyen?

b) Elérhető-e tetszőleges kiindulási helyzet esetén, hogy mindegyik csúcshoz az 1-es szám tartozzon?

### III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. Melyik az a legkisebb pozitív egész, amelyik nem állítható elő két pozitív racionális szám négyzetének összegeként?

2. Egy paralelogramma kerülete  $K$ , az oldalak felezőpontja által meghatározott négyszög kerülete pedig  $k$ . Bizonyítsuk be, hogy ha a paralelogramma egyik szöge  $60^\circ$ -os, akkor

$$\frac{k}{K} \geq \frac{1 + \sqrt{3}}{4}.$$

3. Hány olyan pozitív egész számokból álló  $(x, y, z)$  számhármast van, amely kielégíti a  $2^x + 2^y + 2^z < 2^k$  egyenlőtlenséget, ahol  $k$  egy 2-nél nagyobb pozitív egész szám?

4. Adott a síkban az  $AB$  szakasz. Mi azoknak a  $C$  pontoknak a halmaza a síkban, amelyekre az  $ABC$  háromszög  $A$ -hoz tartozó súlyvonala és  $B$ -hez tartozó magasság-vonala egyenlő hosszú?

### Második forduló

I. és II. kategória: Szakközépiskolások és nem speciális tantervű gimnáziumi tanulók

1. Egy adott  $AB$  szakasz  $X$  belső pontjára teljesül, hogy az  $AB$  szakaszra rajzolt  $AX$  oldalú szabályos háromszög és az  $XB$  oldalú szabályos hatszög területének összege minimális. Hol helyezkedik el ekkor az  $AB$  szakaszon az  $X$  pont?

2. Melyik az a legkisebb pozitív egész, amelyik nem állítható elő két pozitív racionális szám négyzetének összegeként?

3. Tekintsük a csupa 1-es vagy 2-es számjegyet tartalmazó  $n$ -jegyű számokat ( $n \geq 1$ ). E számok közül (adott  $n$  érték esetén)  $A_n$ -nel jelöljük azoknak a számát, amelyek azonos számú 1-es és 2-es számjegyből állnak,  $B_n$  pedig legyen azon számok száma, amelyek több 1-est tartalmaznak, mint 2-est. Van-e olyan érték, amelyre  $A_n = B_n$ ?

4. Legyen egy tetszőleges  $ABC$  háromszög  $AB$ , illetve  $AC$  oldalának felezőpontja  $D$ , illetve  $E$  pont. A  $DE$  szakasz  $F$  felezőpontján átmenő  $BF$  egyenes az  $AC$  oldalt a  $G$  pontban metszi. Mekkora a  $BCEF$  és a  $FGAD$  négyszög, illetve a  $BFD$  és az  $FEG$  háromszögek területének aránya?

### Harmadik (döntő) forduló

#### I. kategória: Szakközépiskolások

1. Melyek azok az egész számokból álló  $(x; y)$  számpárok, amelyekre teljesül az  $x^2 + y^2 + xy = x - y$  egyenlőség?

2. Egy  $2r$  és egy  $r$  sugarú kör kívülről érinti egymást. Tekintsük azokat a köröket, amelyek mindkét kört érintik, és középpontjuk a két adott kör egyik közös külső érintőjén van. Mekkora ezek sugarának aránya?

3. Mely  $k$ -re lehet egy  $k \times k \times k$ -as kockát  $1 \times 1 \times 1$ -es fekete és fehér kis kockákból úgy összeállítani, hogy bármelyik kis kocka mellett pontosan két vele megegyező színű, lapban szomszédos kis kocka legyen?

#### II. kategória: Nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. Ismeretes, hogy az  $ax + by = c$  egyenletet kielégítő bármely valós  $(x; y)$  számpárra teljesül az  $x^2 + y^2 > 1$  egyenlőtlenség, ahol az  $a$ ,  $b$  és  $c$  paraméter egy háromszög három oldalának hossza.

(I) Mutassuk meg, hogy az  $a$ ,  $b$ ,  $c$  oldalú háromszög tompaszögű.

(II) Igazoljuk, hogy  $|x| + |y|$  minimuma legfeljebb  $\frac{c}{\sqrt{ab}}$ .

2. Az  $x$  és  $y$  pozitív egészek mely értékeire lesz a  $4^x + 4^{x+1} + 4^y$  kifejezés értéke négyzetszám?

3. A következő négy szabály szerint kell köröket elhelyezni a síkon:

(I) semelyik három kör se érintse egymást ugyanabban a pontban;

(II) mindegyik kör pontosan négy másikat érintsen;

(III) a lehető legkevesebb kör legyen;

(IV) a lehető legkevesebb különböző sugár legyen.

Hány körből áll egy – a fenti szabályoknak megfelelő – körelrendezés?

Számítsuk is ki egy ilyen körelrendezésben a körök sugarait.

### III. kategória: Speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók

1. Az  $x$ ,  $y$  és  $z$  pozitív egészek mely értékeire lesz a  $4^x + 4^y + 4^z$  kifejezés értéke négyzetszám?

2. Egy tetraéder csúcsainál összeadjuk a csúcsból kiinduló élek egymással bezárt szögeit. Bizonyítsuk be, hogy ha a négy csúcsnál kapott összeg mind egyenlő egymással, akkor a tetraéder lapjainak körülírt körei egyenlő sugarúak.

3. Ketten a következő játékot játsszák. Egy 100 kavicsot tartalmazó halomból felváltva vesznek el, és az nyer, aki az utolsó kavicsot elveszi. Korlátozva van azonban az, hogy hány kavicsot lehet elvenni. A Kezdőnek egy kavicsot kell elvennie, utána a Második elvehet egyet vagy kettőt, ezután újra a Kezdő jön, és egy, két vagy három kavicsot vehet el. Általában az  $n$ -edik lépésben az éppen sorra következő játékos legalább egy, de legfeljebb  $n$  kavicsot vehet el.

Kinek van nyerő stratégiája?

Mi a helyzet akkor, ha 1998 kavicsal játszanak?