I. forduló

Kezdők (legfeljebb I. osztályosok)

1. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$\left|\frac{x+1}{x-1}\right| = \frac{x+1}{x-1}.$$

2. $N = 9 + 99 + 999 + \ldots + \underbrace{99\ldots9}_{1990 \text{ db számjegy}}.$

Az N szám tízes számrendszerbeli alakjában hányszor fordul elő az 1-es?

3. Mutassa meg, hogy ha az a,b, x, y valós számokra teljesül, hogy

$$a + b = x + y$$

és

$$a^2 + b^2 = x^2 + y^2,$$

akkor

$$a^3 + b^3 = x^3 + y^3.$$

4. Az ABC háromszögben a BC oldallal párhuzamos EF középvonal egyenesét a B-ből, ill. C-ből húzott szögfelező az M, illetve N pontban metszi. Bizonyítsa be, hogy $AB + AC = BC + 2MN$.

5. Mely pozitív egész x és y számokra teljesül az $x(x + 1) = y(y + 2)$ egyenlőség?

6. Az ABC háromszögben az A-ból, illetve B-ből húzott magasság talppontja A_1, illetve B_1. Az A_1B_1 szakasz felezőpontja N, AB felezőpontja M. Szerkessze meg a háromszöget, ha adott az A_1B_1, az MN és az A_1B_1B szög.

7. Egy sakkverseny hét napon át tartott. A résztvevők minden nap mindenkivel egy partit játszottak. A beszámoló írója a játékosok pontos számára nem emlékezett; csak arra, hogy huszonötnél nem voltak többen. Egyetlen játszma sem végződött döntetlenül. Nem volt olyan játékos, aki egy nap az összes mérkőzését elvesztette volna. Az egyetlen hölgy versenyző is egyre jobban belejött: minden nap több győzelmet szerzett, mint a megelőző napon. Hányszor nyert az egyes napokon, ha összesen az általa lejátszott partik ötödét nyerte meg? Hány résztvevője volt a versenynek?

8. Vegyük fel az $ABCD$ négyzet BC oldalán az E, és CD oldalán az F pontokat úgy, hogy az AEF háromszög szabályos legyen. I gazolja, hogy az ABE és AFD háromszögek területének összege egyenlő az ECF háromszög területével.

Haladók (II. osztályosok)

1. Hány egész (x, y) számpár elégíti ki a következő egyenletet:

$$\left|\frac{1995 - 5x}{x-1}\right| - 1 = \frac{x + y - 1 - xy}{1 - x}?$$

2. Legyen P egy adott téglalap belső pontja. Tükrözzük P-t a téglalap oldalaira. Mikor lesz a tükörképek által meghatározott négyszög területe minimális?

3. Mely valós számok elégítik ki az alábbi egyenletet?

$$[\sqrt{x}] = \sqrt{[x]}.$$

4. Hány olyan pozitív egész szám van, amelyik osztója 10^{40} és 20^{30} számok valamelyikének?

5. Hányféleképpen írhatunk a MATEMATIKA szó betűi helyére számjegyeket úgy, hogy a kapott tízjegyű szám számjegyeinek szorzata 2143750 legyen? (Azonos betűk helyére azonos számjegyeket kell írni.)

6. Az ABC háromszög A-ból induló súlyvonalának talppontja D. Mekkora a BAC szög, ha $DAC\sphericalangle + ABC\sphericalangle = 90°$ és $AB \neq AC$?

7. Egy futóversenyen $1, 2, \ldots, n$ rajtszámú versenyzők indultak, holtverseny nem volt. Minden versenyző rajtszámához helyezése sorszámát hozzáadva a kapott számok csupa különböző maradékot adnak n-nel osztva. Milyen n számok esetén lehetséges ez?

8. Egy köralakú biliárdasztalon 2400 darab 1 cm sugarú golyó helyezkedik el. Bizonyítsuk be, hogy legalább még egy ugyanekkora golyó lerakható az asztalra a többi elmozdítása nélkül, ha az asztal sugara legalább 1 méter.

II. forduló

Kezdők (legfeljebb I. osztályosok)

A szakközépiskolások feladatai

1. 1990 darab pozitív egész szám összege 3960098. Bizonyítsa be, hogy van legalább két egyenlő a számok között, vagy van legalább két páros.

2. Igazolja, hogy bármely x valós számra teljesül, hogy

$$x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1 > 0.$$

3. Az $ABCD$ húrtrapéz körülírt körének középpontját tartalmazza. A trapéz átlói $60°$-os szöget zárnak be egymással. A köré írt kör középpontjának és az átlók metszéspontjának a távolsága 2 hosszúságegység. Mekkora a párhuzamos oldalak hosszának a különbsége?

Az általános tanterv szerint tanulók feladatai

1. Bizonyítsa be, hogy

$$\frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+x}{z+t}$$

egész szám, ha értelmezve van, és

$$\frac{x}{y+z+t} = \frac{y}{z+t+x} = \frac{z}{t+x+y} = \frac{t}{x+y+z}.$$

2. Egy húrtrapéz átlói $60°$-os szöget zárnak be egymással. A trapéz köré írt kör középpontjának és az átlók metszéspontjának a távolsága 2 hosszúságegység. Mekkora a párhuzamos oldalak hosszának a különbsége?

3. Adott 19 különböző 91-nél kisebb pozitív egész szám. Igaz-e, hogy a különbségeik között van legalább három egyforma szám?

A speciális matematika tanterv szerint tanulók feladatai

1. Adott q_0 és n pozitív egészekre legyen $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén $q_1 = (q_{i-1} - 1)^3 + 3$. Legfeljebb mekkora lehet az n, ha $q_1, q_2, \ldots, q_n$ mindegyike prímhatvány?

2. Oldja meg az $[x^2 - 2x] = [x^2] - 2[x]$ egyenletet a valós számok körében.

3. Az ABC háromszög C-nél levő szöge derékszög. A C-ből induló magasság talppontja M, az AC oldal felezőpontja F, a BC oldal B-hez közelebbi harmadolópontja D, a C-hez közelebbi harmadolópontja E. A BDM háromszög köré írt kör középpontja O. Bizonyítsa be, hogy az FOE és ABC háromszögek hasonlók.

Haladók (II. osztályosok)

A szakközépiskolások feladatai

1. Egy derékszögű trapéz oldalainak cm-ben mért hossza valamilyen sorrendben négy darab egymást követő egész szám. Határozzuk meg a trapéz területét.

2. Melyik az a legkisebb négyzetszám, amely előállítható 1990 darab egymást követő pozitív egész szám összegeként?

3. Egy 9 tagú társaságban mindenki pontosan 5 másik embernek átad 100 Ft-ot. Bizonyítsuk be, hogy az ajándékozások után van két olyan ember, akinek ugyanannyi forinttal változott a vagyona.

Az általános tanterv szerint tanulók feladatai

1. Az ABC háromszög oldalai a, b és c hosszúságúak. A B csúcsból az A-hoz tartozó belső szögfelezőre állított merőleges talppontja P. Milyen messze van P a BC oldal felezőpontjától?

2. Egy sakkedzésen minden játékos legfeljebb k pontot szerzett (döntetlenért fél pont, győzelemért egy pont jár). Bizonyítsuk be, hogy akkor

a) van olyan játékos, aki legfeljebb $2 \cdot k$ mérkőzést játszott;

b) a játékosok elhelyezkedhetnek legfeljebb $2 \cdot k + 1$ teremben úgy, hogy azonos terembe kerülő játékosok még nem játszottak egymással.

3. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b, c és d pozitív valós számok között d a legnagyobb, akkor

$$a(d-b) + b(d-c) + c(d-a) \leq d^2.$$

A speciális matematika tanterv szerint tanulók feladatai

1. Az ABC háromszög oldalai a, b és c hosszúságúak. A B csúcsból az A-hoz tartozó belső szögfelezőre állított merőleges talppontja P. Milyen messze van P a BC oldal felezőpontjától?

2. Az erdőben 12 törpe él piros vagy kék házikóban. Minden év i-edik hónapjában az i-edik törpe felkeresi összes barátját, hogy eldöntse, átfesse-e a házát. Akkor és csak akkor fogja átfesteni (pirosról kékre vagy fordítva), ha a barátai többsége másszínű házban lakik, mint ő. Bizonyítsuk be, hogy néhány év után

már senki nem festi át házikóját. (A barátságok kölcsönösek és az évek során nem változnak.)

3. Az a_1, a_2, …, a_n számsorozatot nevezzük „átlagmentesnek”, ha nincsen három eleme, a_i, a_j és a_k $(1 \leq i < j < k \leq n)$, amelyre $a_j = \dfrac{a_i + a_k}{2}$ állna fenn. Bizonyítsuk be, hogy bármely, különböző egész számokból álló, véges sorozat átrendezhető átlagmentes sorozattá.