

## I. forduló

### Kezdők (legfeljebb I. osztályosok)

1. Ábrázolja derékszögű koordináta-rendszerben azoknak a pontoknak a halmazát, melynek koordinátáira  $||x - 3| - 1| < y \leq 2$  teljesül.

2. Hosszabbítsa meg egy szabályos hatszög minden oldalát a saját hosszával (egy meghatározott körüljárási irányt tartva). A végpontok összekötésével nyert új hatszög területe hányszorosa az eredetinek?

3. Adott három, különböző pozitív számjegy. Képezze e három számjegyből az összes lehetséges – különböző számjegyekből álló – egy, két és háromjegyű számot, és adja ezeket össze. Lehet-e az összeg a) 1988; b) 2000?

4. Melyik nagyobb:

$$1988^{1988} \text{ vagy } 1987^{1987} + 1988^{1987} + 1987^{1988}?$$

5. Adott a síkon két egymásra merőleges egyenes,  $e$  és  $f$ , egy  $C$  pont és egy  $d$  távolság. Szerkesszen olyan derékszögű háromszöget, melynek derékszögű csúcsa a  $C$  pont, átfogója  $d$  hosszúságú és az átfogó egy-egy végpontja az  $e$ , illetve  $f$  egyenesen van.

6. Gondoltam egy számot. Ha 7-tel osztom, a maradék 6; ha 4-gyel osztom, a maradék 1. Mennyi a maradék, ha 28-cal osztom?

7. Oldja meg az  $[[[x]] - [|x|]] = 0$  egyenletet! ( $[z]$  a  $z$  szám egészrészét jelenti, azt a legnagyobb egész számot, ami nem nagyobb  $z$ -nél.)

8. Legyen  $n$  (tízes számrendszerben) legalább  $k$  jegyű természetes szám. Igazolja, hogy az alábbi állítások ekvivalensek!

a)  $n^4$  utolsó  $k$  db jegye azonos  $n$  utolsó  $k$  db jegyével.

b)  $n^2$  utolsó  $k$  db jegye azonos  $n$  utolsó  $k$  db jegyével.

### Haladók (II. osztályosok)

1. Határozzuk meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen az

$$f(x) = \frac{\sqrt{\sqrt{2x - x}\sqrt{x - 2}}}{\sqrt{\sqrt{x - 2} + 1}}$$

függvény értelmezhető.

2. Van-e olyan háromszög, melynek két oldala 1 és 4 cm, valamely két magassága pedig 3 és 4 cm hosszú?

3. Hány téglalap jelölhető ki a rajzon látható  $4 \times 10$ -es rács vonalaival?



4. A  $p$  prímszám (a tízes számrendszerben felírva) páros sok jegyet tartalmaz. Ha a  $p$  számot fordított sorrendben írjuk fel, visszakapjuk saját magát. Határozzuk meg  $p$ -t.

5. Az  $ABC$  derékszögű háromszögbe írt négyzet két csúcsa az  $AB$  átfogón, másik két csúcsa pedig a befogókon van. Mekkora a befogók aránya, ha a négyzet  $K$  középpontjára igaz, hogy  $CAB\triangleleft = ABK\triangleleft$ ?

6. Legyenek  $x$  és  $y$  valós számok. Tudjuk, hogy az  $x + y$ ,  $x - y$ ,  $xy$ ,  $\frac{x}{y}$  számok egyike sem 0 és közülük három racionális. Mutassuk meg, hogy  $x$  és  $y$  racionális számok.

7. Tetszőleges számú egységnyi, illetve két egységnyi oldalú négyzet áll rendelkezésünkre. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható 1987 darab úgy, hogy belőlük ki lehessen rakni egy négyzetet (hézagtalanul és egyrétűen); viszont bárhogyan is választunk ki 1988 darabot, azokból sohasem állítható elő négyzet.

8. Az  $a$ ,  $b$ ,  $c$  valós számok olyanok, hogy  $|ax^2 + bx + c| \leq 1$ , ha  $|x| \leq 1$ . Mutassuk meg, hogy  $|x| \leq 1$  esetén  $|cx^2 - bx + a| \leq 4$  is teljesül.

## II. forduló

### Kezdők (legfeljebb I. osztályosok)

#### *A szakközépiskolások feladatai*

1. A  $2bx + b = 3cx + c$  egyenletben  $b$  is és  $c$  is az 1; 2; ...; 9 értékeket veheti fel. Melyik  $b$ ,  $c$  számpárokra lesz az egyenlet gyöke pozitív?

2. Szerkessze meg az  $ABCD$  paralelogrammát, ha adott az  $AC$  átló, valamint a sík egy adott  $P$  pontjának a csúcsoktól mért távolsága ( $PA$ ,  $PB$ ,  $PC$ ,  $PD$ ).

3. Adja meg bármely  $n$  pozitív egész számra az  $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$  szám utolsó számjegyét.

#### *Az általános tantervű osztályok feladatai*

1. Az  $ABC$  hegyesszögű háromszög  $A$ -hoz tartozó magasságának talppontja  $A'$ ,  $B$ -hez tartozó magasságának talppontja  $B'$ , a magasságpont  $M$ . Bizonyítsa be, hogy az  $MC$ ,  $B'A'$ ,  $AB$  szakaszok felezőpontjai egy egyenesre esnek!

2. Egy hálózat 6 pontból és 10 élből áll. A hat pont egy szabályos ötszög öt csúcsa és középpontja. Az élek az ötszög oldalélei valamint a középpontból a többi csúcsba vezető sugarak. Minden ponthoz egy-egy valós számot rendelünk. Egy él teljesítményének nevezzük az él két végpontjába írt számok különbségének a négyzetét. Legyen a középpontba írt szám 0, egy másik pontba írt szám 1. Határozza meg a fennmaradó négy pontba írt számot úgy, hogy a tíz él teljesítményének összege minimális legyen.

3.  $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$  pozitív páratlan számok. Bizonyítsa be, hogy van olyan négyzetszám ( $k^2$ ), amelyre

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq k^2 \leq a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}!$$

#### *A speciális matematika tantervű osztályok feladatai*

1. Osszuk fel a síkot egy körvonallal, egy téglalappal és egy háromszögvonallal a lehető legtöbb tartományra! Hány rész érhető el?

2.  $a_1 < a_2 < \dots < a_n < \dots$  pozitív páratlan számok. Bizonyítsa be, hogy van olyan négyzetszám ( $k^2$ ), amelyre

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq k^2 \leq a_1 + a_2 + \dots + a_n + a_{n+1}!$$

3. Milyen téglalap alakú sakktáblák fedhetők le egyrétűen az ábrán látható egybevágó alakzatokkal?



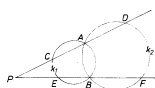
### Haladók (II. osztályosok)

#### A szakközépiskolások feladatai

1. Oldjuk meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán:

$$x - x^3 + x^5 - x^7 + x^9 - x^{11} + x^2 - x^4 + x^6 - x^8 + x^{10} = 1.$$

2. A különböző sugarú  $k_1$  és  $k_2$  körök az  $A$  és  $B$  pontokban metszik egymást. A körökön kívüli  $P$  pontot összekötöttük az  $A$  és  $B$  pontokkal. A  $PA$  és  $PB$  egyenes a köröket további  $C, D, E$  és  $F$  pontokban metszi (lásd az ábrát). Bizonyítsuk be, hogy  $PC \cdot PD \cdot PA^2 = PE \cdot PF \cdot PB^2$ . ( $PC, PD$  stb.... a szakaszok hosszát jelöli.)



3. Az  $n$  természetes szám olyan, hogy  $2n + 1$  és  $3n + 1$  is négyzetszám. Bizonyítsuk be, hogy  $n$  osztható 8-cal.

#### Az általános tantervű osztályok feladatai

1. Az  $ABC$  háromszög magasságpontja  $M$ . Tudjuk, hogy  $AB = CM$ . Mekkora lehet a háromszög  $C$  csúcsnál levő szöge?

2. Az  $x^2 + p_1x + q_1 = 0$  és az  $x^2 + p_2x + q_2 = 0$  másodfokú egyenletek együtthatói egészek. Tudjuk, hogy az egyenleteknek van olyan közös gyöke, amely nem egész szám. Bizonyítsuk be, hogy  $p_1 = p_2, q_1 = q_2$ .

3. Egy gulyában két falu 65 tehene legel, vörösek, fehérek, feketék és tarkák. Igazoljuk, hogy ha nincsen öt különböző korú, azonos színű tehén a gulyában, akkor található három azonos színű és egyidős tehén ugyanabból a faluból.

#### A speciális matematika tantervű osztályok feladatai

1. Bizonyítsuk be, hogy minden  $x$  pozitív valós számra teljesül az

$$\left(\frac{1}{2^x}\right)^{1+\frac{2}{x}} + \left(1 - \frac{1}{2^{x+1}}\right)^{1+\frac{2}{x}} < 1$$

egyenlőtlenség.

2. Az  $ABC$  hegyesszögű háromszög  $M$  magasságpontjának az  $A, B, C$  csúcsoktól vett távolsága rendre  $x, y, z$ . Bizonyítsuk be, hogy  $abc = ayz + xbz + xyc$ , ahol  $a, b, c$  rendre a háromszög  $A, B, C$  csúcsaival szemközti oldalainak hosszát jelöli.

3. Adott a síkon véges sok párhuzamos oldalú téglalap úgy, hogy bármely  $k + 1$  között található két olyan, melynek van közös pontja. Mutassuk meg, hogy megadható  $k^2$  darab pont, melyek közül bármely téglalap tartalmaz legalább egyet.