

I. forduló

Kezdők (legfeljebb I. osztályosok) versenye

1. Egy céllövölde használati díját úgy állapították meg, hogy jelentkezésnél mindenki fizet 5 Ft belépődíjat, lövésenként pedig 1,5 Ft-ot. A konkurens cég belépődíja 15 Ft, de itt 50 fillérbe kerül egy lövés. Melyik pavilont részesítenéd előnyben, ha 4, 8 vagy 12 alkalommal szeretnél lőni? Hány lövés esetén részesítenéd előnyben az egyik, ill. a másik pavilont?

2. Egy kétjegyű szám elé, majd mögé kettést írtam. Így háromjegyű számokat kaptam. A két háromjegyű szám különbsége 81. Melyik számra gondoltam?

3. Az $ABCD$ téglalap oldalaira $\overline{AB} = 3\overline{AD}$. Az \overline{AB} szakaszt három egyenlő részre osztjuk az M és N pontokkal. Határozzuk meg a következő szögösszeget: $\angle AMD + \angle AND + \angle ABD$!

4. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet

$$|1 - |x + 1|| = x - [x].$$

(Az $[x]$ jelenti az x -nél nem nagyobb egész számok közül a legnagyobbat!)

5. Adott egy paralelogramma. Tekintsük az összes olyan négyzetet, amelynek csúcsai a paralelogramma különböző oldalegyenesekre esnek. Hol helyezkednek el a négyzetek szimmetriaközéppontjai?

6. Melyek azok az n és k természetes számok, amelyekre

$$n \cdot k = 10 \cdot |n - k|?$$

7. Négyzetrácsos füzetlapon a négyzetoldalak hosszát tekintjük egységnyi-nek. Rajzoljunk rá egy téglalapot, melynek csúcsai rácspontokra illeszkednek és oldalai nem párhuzamosak rácsegyenesekkel. Igaz-e, hogy minden esetben egész szám az ilyen téglalap területe? (Először négyzetre oldjuk meg a feladatot.)

8. Határozzuk meg $1986^{1987} + 1987^{1986}$ 10-nél kisebb pozitív osztóit!

Haladók (legfeljebb II. osztályosok) versenye

1. Oldjuk meg:

$$\sqrt{x^2 - 2x + 1} + 1 = 2y$$
$$|x| = 1 - y^2.$$

2. Egy kétjegyű számot megszorozva a jegyei felcserélésével nyerhető kétjegyű számmal, 3627-et kaptunk eredményül. Melyik ez a kétjegyű szám?

3. Adott egy O_1 középpontú k_1 kör és egy O_2 középpontú k_2 kör úgy, hogy k_2 áthalad O_1 -en. Az O_2O_1 egyenes két pontban metszi a k_1 kört, az O_2 -től távolabbi metszéspontja legyen M . A k_1 és k_2 kör az A és B pontokban metszi egymást. Tudjuk, hogy az MAO_2B négyszög rombusz. Mekkora a szögei?

4. Egy háromszögbe téglalapot írtunk úgy, hogy a téglalap négy csúcsa a háromszög területén van. Tudjuk, hogy a téglalap középpontja és a háromszög súlypontja egybeesik. Számítsuk ki a téglalap és a háromszög területének arányát!

5. Bizonyítsuk be, hogy $1987^{1987} - 1987$ osztható 36-tal!

6. Bizonyítsuk be, hogy a háromszög szögfelezője kisebb, mint az ugyanabból a csúcsból kiinduló két oldalának mértani közepe!

7. Adott n db egész szám, melyek szorzata n , összegük 0. Bizonyítsuk be, hogy n 4-gyel osztható!

8. Legyenek a_1, a_2, \dots, a_n egymástól különböző, egynél nagyobb természetes számok. Bizonyítsuk be, hogy

$$\left(1 - \frac{1}{a_1}\right) \left(1 - \frac{1}{a_2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{a_n}\right) > \frac{1}{2}.$$

II. forduló

Kezdők (I. Osztályosok)

A szakközépiskolások feladatai

1. Melyek azok a különböző számjegyekből álló hatjegyű számok, melyeknek számjegyei – valamilyen sorrendben – 1, 2, ..., 6, és az első két számjegyből álló kétjegyű szám osztható kettővel, az első három számjegyből álló háromjegyű szám osztható hárommal, és így tovább, és maga a szám osztható hatval?

2. Legyen egy trapéz egyik szárának végpontja P és Q . A P és Q csúcsoknál lévő belső szög szögfelezői a szemközti szár F felezési pontjában metszik egymást. Bizonyítsa be, hogy a trapéz területe $PF \cdot FQ$!

3. Oldja meg a valós számok lehető legbővebb részhalmazán az alábbi egyenlőtlenséget:

$$\frac{2x + 2}{x^2 + 3x + 2} \geq -1.$$

Az általános tantervű osztályok feladatai

1. Bizonyítsa be, hogy a konvex négyszöget két középvonala négy olyan négyszögre bontja, melyek közül a két-két szemközti négyszög területének összege egyenlő!

2. Az x, y, z valós számokra teljesül, hogy

$$\frac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz} + \frac{z^2 + x^2 - y^2}{2zx} + \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy} = 1.$$

Igazolja, hogy a három tört közül valamelyik kettő értéke 1!

3. Az 1, 2, 3, ..., 2000 számokat valamilyen sorrendben egymás mellé írva egy új számot képeztünk. Lehet-e az így kapott szám négyzetszám?

A speciális matematika tantervű osztályok feladatai

1. Az x, y, z valós számokra teljesül, hogy

$$\frac{y^2 + z^2 - x^2}{2yz} + \frac{z^2 + x^2 - y^2}{2zx} + \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2xy} = 1.$$

Igazolja, hogy a három tört közül valamelyik kettő értéke 1!

2. Adott a térben négy különböző pont. Határozza meg azokat a síkokat, amelyek a négy pont mindegyikétől egyenlő távolságra vannak!

3. Helyezzünk el egy kör kerületén n pontot, és számozzuk meg ezeket tetszőleges sorrendben az 1-től n -ig terjedő sorszámokkal! Azt mondjuk, hogy két pont, A és B összeköthető, ha nem szomszédosak, továbbá az A és B pontokat összekötő körívek közül legalább az egyikén csak olyan pontok helyezkednek el, melyek sorszáma A sorszámánál és B sorszámánál is kisebb. Igazoljuk, hogy az összeköthető pontpárok száma $n - 3$.

Haladók (II. Osztályosok)

A szakközépiskolások feladatai

1. Az alábbi ábra egy telek alaprajzát ábrázolja: a karikák gyümölcsfákat jelölnek.



Az A -val jelölt fán egy cinke, a B -vel jelölt fán egy rigó ül. Időegységenként mindkét madár a tőle észak–déli vagy kelet–nyugati irányban álló egyik legközelebbi fára repül. Lehetséges-e, hogy valamikor mindketten ugyanazon a fán ülnek?

2. Egy ABC háromszög ($AC \neq BC$) beírt körének középpontja O . Az AO egyenes K , a BO egyenes M pontban metszi a szemközti oldalt. Mekkora a háromszög C csúcsánál lévő szöge, ha $OM = OK$?

3. Mekkora területű a koordinátasíkon azon $(x; y)$ pontok halmaza, melyek koordinátáira teljesülnek a következők:

$$|x| \leq 3, \tag{1}$$

$$y^2 - 3x^2 + 2y \geq -1, \tag{2}$$

$$y^2 \leq 4? \tag{3}$$

Az általános tantervű osztályok feladatai

1. A sík két pontját szomszédosnak nevezzük, ha távolságuk nem nagyobb 1 egységnél. Egy pont önmagának nem szomszédja. Bizonyítsuk be, hogy a sík négy olyan pontja, melyek mindegyikének a fennmaradó három közül legalább kettő szomszédja, mindig lefedhető egy egységnyi sugarú körlappal!

2. Bizonyítsuk be, hogy 1-től 1 000 000-ig több olyan egész szám van, amely előáll két négyzetszám összegeként, mint amely két pozitív köbszám összegeként írható fel!

3. Legyen n pozitív egész szám. Az $\{a, b, c\}$ számhármast „jónak” nevezzük, ha az $|a - b|$, $|b - c|$, $|c - a|$ értékek valamilyen sorrendben $1, n, n + 1$. Be lehet-e osztani az összes egész számot páronként közös elem nélküli „jó” hármas csoportokba?

A speciális matematika tantervű osztályok feladatai

1. A sík két pontját szomszédosnak nevezzük, ha távolságuk nem nagyobb 1 egységnél. Egy pont önmagának nem szomszédja. Bizonyítsuk be, hogy a sík négy olyan pontja, melyek mindegyikének a fennmaradó három közül legalább kettő szomszédja, mindig lefedhető egy egységnyi sugarú körlappal!

2. Hány (x, y) valós számpárra teljesül, hogy

$$x^2 - xy + 1 = 0$$

és

$$x^2 - 2xy + 2y^2 + 2x - 3y - 1 \leq 0?$$

3. Legyenek n , k és d olyan egész számok, melyekre $1 \leq d \leq k \leq n - 2$. Vegyünk fel a körvonalon n különböző pontot. Nevezzünk k szomszédos pontot „ k hosszúságú ív”-nek. – Hogyan kell kiválasztanunk a lehetséges n darab, k hosszúságú ív közül d különbözőt, hogy közös pontjaiknak száma a lehető legnagyobb legyen?