Kezdők (legfeljebb I. osztályosok)

I. forduló

1. Melyik nagyobb: $\dfrac{3^{1983}-2}{3^{1984}-2}$ vagy $\dfrac{3^{1984}-2}{3^{1983}-2}$?

2. Legyen $A$ a sík azon pontjainak halmaza, amelyek $x$; $y$ koordinátáira fennáll az $y \geq x^2 - 1$ egyenlőtlenség. A $B$ halmazba azok a pontok tartozzanak, amelyekre $y \leq 3 - |x|$, a $C$ halmazba pedig azok, amelyekre $|x| \leq 1$ és $|y-1| \leq 1$ teljesül. Ábrázolja az $(A \cap B) \setminus C$ halmazt!

3. Adott a térben három különböző sík, $S_1$, $S_2$ és $S_3$ tetszőleges helyzetben. Sorolja fel, hogy – a síkok egymáshoz viszonyított helyzetétől függően – mi lehet azoknak a pontoknak a halmaza, amelyeket legalább két sík tartalmaz!

4. Határozza meg mindazon $x$ valós számokat, amelyek kielégítik az alábbi egyenletet:

$$\operatorname{sgn}\left(1 - \frac{3}{x-2}\right) = |x-3| - 2.$$

$$\operatorname{sgn} a = \begin{cases} 1, & \text{ha} \quad a > 0; \\ 0, & \text{ha} \quad a = 0; \\ -1, & \text{ha} \quad a < 0. \end{cases}$$

5. Két konvex négyszög oldalfelező pontjai egybeesnek. Igazolja, hogy a két négyszög területe egyenlő!

6. Bizonyítsa be, hogy ha a háromszög magasságpontja és köré írt körének középpontja a háromszög egyik szögfelezőjére szimmetrikus, akkor a háromszög egyik szöge $60^\circ$!

7. Határozza meg az összes olyan pozitív egészekből álló $(a, b, c)$ számhármast, amelyre $b+2c+3a$ osztható $(a+2b+3c)$-vel, továbbá $c+2a+3b$ osztható $(b+2c+3a)$-val!

8. Tekintse az alábbi szorzatokat:

$$A = \left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\left(1-\frac{1}{8}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{100}\right),$$
$$B = \left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{5}\right)\left(1-\frac{1}{7}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{1}{99}\right).$$

Számítsa ki az $AB$ szorzatot és mutassa meg, hogy

$$A^2 < \frac{99}{10\,000},$$
$$B^2 > \frac{1}{100}.$$

Haladók (II. osztályosok)
I. forduló

1. Van -e egész számokból álló megoldása az $x^2 - 2y^2 = 3$ egyenletnek?

2. Szerkesszük meg az egyenlőszárú trapézt, ha adott átlóinak metszéspontja, a köré írt köre és a szár hossza.

3. Ábrázoljuk a derékszögű koordináta-rendszerben azokat az $(x; y)$ számpárokat amelyekre

$$|x+1| + |x-1| = |y+1| + |y-1|.$$

4. Mutassuk meg, hogy a sík bármely szabályos sokszögének csúcsai megszínezhetők legfeljebb három színnel úgy, hogy azonos színű csúcsok távolsága ne legyen egy egység.

5. Egy háromszög minden oldalának mértékszáma egész. Mekkorák lehetnek az oldalaik, ha összegük 200, továbbá a legnagyobb oldal ötszöröse és a másik két oldal háromszoros összege közötti különbség 120-szal nagyobb, mint a legkisebb oldal négyszerese?

6. Valaki azt állítja, hogy minden természetes számról el tudja dönteni, osztható-e 1985-tel, pusztán a szám utolsó 200 jegyének ismeretében. Lássuk be, hogy nincs igaza. Van-e olyan $y$ szám, amelyre $1000 < y < 2000$ és 1985 helyére $y$-t írva az állítás mégis igaz lesz?

7. A $P(x)$ egész együtthatós polinomról tudjuk, hogy öt különböző egész helyen $+1$ értéket vesz fel. Bizonyítsuk be, hogy nincs olyan $k$ egész szám, amelyre $P(k) = -1$.

8. Adott egy egységoldalú négyzet és a négyzetben 9 pont, amelyek közül semelyik három sincsen egy egyenesen. Igazoljuk, hogy van a 9 pont között 3 olyan, amelyek egy legfeljebb 0,125 területű háromszöget határoznak meg.

*II. forduló*

Kezdők (I. osztályosok)
*Szakközépiskolai tanulóknak*

1. Határozza meg azokat az egész számokból álló $x$, $y$ számpárokat, amelyekre

$$x - |y-1| > -2,$$
$$x + \left|y - \frac{3}{2}\right| < 2$$

érvényes!

2. Legyen $a$ és $b$ a tér két adott egyenese. Mi azon szakaszok felezőpontjainak összessége, amelyek egyik végpontja az egyik, másik végpontja a másik egyenesen van?

3. Keressük meg az összes olyan természetes számot, amely a tízes számrendszerben nyolcjegyű, jegyei rendre $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$, $g$, $h$ $(a \neq 0)$, továbbá $c = 2d$, $a + d = h$, $bg + cf = bd^2$, $c + g = d^2$, $d = (a+e)^2$, $e + g = f$.

*A matematikát általános tanterv szerint tanuló gimnazistáknak*

1. Keressük meg azokat az $x$ valós számokat, amelyekre teljesül az

$$\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}} \geq \frac{1}{1-\frac{1}{1+x}} \quad \text{egyenlőtlenség!}$$

2. Legyen $a$ és $b$ a tér két adott egyenese. Mi azon szakaszok felezőpontjainak összessége, amelyek egyik végpontja az egyik, másik végpontja a másik egyenesen van?

3. Határozzuk meg azokat az $n$, $m$ egész számokat, amelyekre teljesül az

$$n^2 + (n+1)^2 = m^4 + (m+1)^4$$

összefüggés!

*Speciális matematika tagozatos gimnáziumi tanulóknak*

1. Határozzuk meg az összes olyan $k$ pozitív egész számot, amelyhez találhatók olyan $n$, $m$ pozitív egészek, hogy

$$\frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2} = \frac{k}{n^2+m^2}.$$

2. Az egységsugarú körbe írt szabályos $n$-szög ($n \geq 3$) egy belső pontja legyen $P$. Bizonyítsa be, hogy van olyan $A$ és $B$ (nem feltétlenül szomszédos) csúcsa a szabályos $n$-szögnek, hogy

$$\left(1-\frac{2}{n}\right) \cdot 180^\circ \leq APB\sphericalangle < 180^\circ.$$

3. Az 1, 2, …, $n$ számokat valamilyen – tetszés szerinti – sorrendben leírva kapjuk az $a_1, \ldots, a_n$ számokat. Mutassuk meg, hogy az

$$\frac{1}{1\cdot a_1} + \frac{1}{2\cdot a_2} + \ldots + \frac{1}{n\cdot a_n}$$

összeg értéke akkor a legkisebb, ha csökkenő sorrendbe rendeztük a számainkat, azaz ha a $a_1 = n, \ldots, a_n = 1$!

Haladók (II. osztályosok)
*Szakközépiskolások feladatai*

1. Az $A_1, A_2, \ldots$ sorozatra az $A_{n+1} = A_n - A_{n-1} + A_{n-2}$ képlet érvényes, $A_1 = 1$, $A_2 = A_3 = 2$. Mennyi $A_{1985}$?

2. Egy egység sugarú kör kerületét egy szabályos $n$-szög és egy szabályos $(n+1)$-szög csúcsai ívekre darabolják. Bizonyítsuk be, hogy valamelyik ív legfeljebb $\frac{\pi}{n(n+1)}$ hosszúságú.

3. Egy asztalon kör alakú pénzérmék fekszenek. Mutassuk meg, hogy valamelyiket a többi érme elmozdítása nélkül eltávolíthatjuk az asztalról. Az érmét csak csúsztatni szabad, felemelni nem!

*Az általános tantervű osztályok feladatai*

1. Egy $6 \times 6$-os sakktáblára néhány dominót helyezünk úgy, hogy mindegyikük pontosan két szomszédos mezőt fed. Bizonyítsuk be, hogy ha 14 mező fedetlen, akkor legalább egy dominó még a táblára helyezhető a többi elmozdítása nélkül.

2. Oldjuk meg az $x^n + y^n = (x+y)^n$ egyenletet az egész számok körében ($n$ természetes szám).

3. Egy konvex sokszöget egymást nem metsző átlóival háromszögekre bontottunk. Mutassuk meg, hogy a háromszögekbe írható körök sugarainak összege legalább $\frac{2t}{k}$, ahol $t$ a sokszög területét, $k$ pedig a kerületét jelöli.

*A speciális matematika tantervű osztályok feladatai*

1. A pozitív egész számokon értelmezett $f$ függvényről a következőket tudjuk:

$$f(f(n)) = 4n - 3 \qquad \text{minden pozitív egész } n\text{-re,} \tag{1}$$

$$f(2^k) = 2^{k+1} - 1 \quad \text{minden nem negatív egész } k\text{-ra.} \tag{2}$$

Határozzuk meg $f(1985)$ értékét.

2. Egy háromszög oldalainak hossza $a$, $b$, $c$. Tekintsük a háromszögnek azokat a belső pontjait, amelyeknek a háromszög oldalaitól mért távolságaiból háromszög szerkeszthető. A háromszög területének mekkora hányadát fedik le ezek a pontok?

3. Egy virágüzletben $n$ darab, egyenként három szál szegfűből álló csokrot rendelünk. Azt szeretnénk, hogy minden csokor három különböző színű szegfűt tartalmazzon, vagy minden csokor minden szegfűje ugyanolyan színű legyen. Bizonyítsuk be, hogy kívánságunk teljesíthető, ha az üzletben $7n$ szál szegfű van.