

## Kezdők (legfeljebb I. osztályosok)

### I. forduló

1. Egy tartályba egy csapon át 600 liter/perc sebességgel 30 %-os szörp ömlik. Háromnegyed óra múlva egy másik csapot is megnyitnak, ezen 40 %-os szörp folyik be, 800 liter/perc sebességgel. Mennyi idő múlva lesz a tartályban a szörp 35 %-os?

2. Legyen  $A$  és  $B$  egy kör átmérőjének a két végpontja. Szerkesszük meg a kör területén azokat az  $X$  pontokat, amelyekhez húzható körérintő az átmérő meghosszabbítását olyan  $C$  pontban metszi, amelyre  $AX = CX$ !

3. – Nem tudod – kérdezte a lottóhúzás napján egy matematikus a kollégáját –, hogy milyen számokat húztak ki?

– Képzeld – felelte az –, van köztük olyan szám, amellyel bármely két kihúzott szám összege osztható!

– Mi ez a szám?

– Ha megmondanám, kitalálnád a nyerőszámokat.

– Legalább azt mondd meg, páros-e vagy páratlan ez a szám? – kérdezte a matematikus, majd a válasz után felkiáltott: – Ötösöm van!

Mi volt az öt nyerőszám, ha a telitalálattal rendelkező matematikus csak egy szelvénnel játszott? (Feltesszük, hogy mindketten jól okoskodtak és persze igazat mondtak.)

4. Ábrázoljuk az (egész számegyenesen értelmezett)

$$x \rightarrow \left| \left| |x| - 1 \right| - 1 \right| \text{ függvényt!}$$

5. Az  $ABC$  háromszög  $C$  csúcsánál levő szöge derékszög.  $CB$  oldalán a  $C$ -től távolodva fölvelt  $A_1, A_2, \dots, A_n$  pontokra teljesüljön, hogy az  $AA_1, AA_2, \dots, AA_n$  egyenesek az  $A$ -nál levő szöget  $n + 1$  egyenlő részre osztják.

Bizonyítsuk be, hogy ekkor  $CA_1 < A_1A_2 < \dots < A_nB$ !

6. Egy sakkversenyen  $n$  nő és  $2n$  férfi vett részt. Mindenki mindenkivel pontosan egyszer játszott. Nem volt döntetlen és a nők által megnyert játszmák száma úgy aránylik a férfiak által megnyert játszmák számához, mint  $7 : 5$ . Hány nő vett részt a játékban?

7. Jelöljük ki egy négyzetlapon öt pontot úgy, hogy a pontok között föllépő legkisebb távolság a lehető legnagyobb legyen. Mekkora ez a távolság?

8. Bizonyítsuk be, hogy bármely  $n$  páratlan természetes számra  $n^{1984} - 1$  osztható  $2^8$ -nal.

### II. Forduló

*Az általános tantervű osztályok feladatai*

1. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert:

$$\begin{aligned} |x - y| &= 7, \\ |x| + |y| &= 8. \end{aligned}$$

2. Létezik-e olyan érintőötszög, melynek oldalai – valamilyen sorrendben – 1, 2, 3, 4, 6 egység hosszúak? (Érintőötszögnek azt az ötszöget nevezzük, amelybe írható olyan kör, amely az ötszög mindegyik oldalát annak belső pontjában érinti.)

3. Egy  $8 \times 8$ -as sakktáblán 42 figura van. Mutassuk meg, hogy van legalább egy olyan  $4 \times 4$ -es kis résztáblája, amelynek átlós mezőin legalább 4 figura áll. (A  $4 \times 4$ -es sakktábla átlós mezőinek azt a 8 mezőt nevezzük, amelyek e sakktábla két átlójára illeszkednek.)

#### *A szakközépiskolások feladatai*

1. Legyenek  $A$  és  $B$  kétjegyű természetes számok. Jelölje  $A^*$  az  $A$ ,  $B^*$  pedig a  $B$  számjegyeinek megcserélésével adódó kétjegyű számot. Határozzuk meg az összes lehetséges olyan  $A$ -t és  $B$ -t, melyre  $AB - 1$  és  $A^*B^* - 1$  osztható 10-zel!

2. 7 db különböző nagyságú almából és 3 db különböző nagyságú barackból két csomagot készítünk. Hány különböző módon lehet ezt megtenni úgy, hogy mindkét csomagban 5 db gyümölcs, és ezek között legalább egy-egy barack legyen?

3. Megegyezik az általános tantervű osztályok 2. feladatával.

#### *A speciális matematika tagozatos osztályok feladatai*

1. Igazoljuk, hogy ha  $a, b, n$  olyan természetes számok, melyekre  $a^{2n} - b^{2n}$  osztható 9-cel, akkor  $a^2 - b^2$  is osztható 9-cel.

2.  $A$  és  $B$  legyen két adott pont a síkon. Tegyük fel, hogy egyetlen körző áll rendelkezésünkre, és azzal is csak egy bizonyos rögzített  $r$  sugarú kört tudunk rajzolni, ahol  $r > AB$ . E körző segítségével szerkesszünk olyan  $C$  pontot a síkon, hogy az  $ABC$  háromszög szabályos legyen.

3. Megegyezik az általános tantervű osztályok 3. feladatával.

### **Haladók (II. osztályosok)**

#### **I. forduló**

1. Az  $x$  és  $y$  valós számokról tudjuk, hogy  $x + y > 0$ . Bizonyítsuk be, hogy  $\frac{x}{y^2} + \frac{y}{x^2} \geq \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$

2. Ábrázoljuk a derékszögű koordinátarendszerben azokat az  $(x; y)$  számpárokat, amelyekre  $||x| - |y|| < 1$ !

3. Bizonyítsuk be, hogy minden  $n$  természetes számra

$$5^{2n+1} \cdot 2^{2n+2} + 3^{n+2} \cdot 2^{2n+1}$$

osztható 38-cal!

4. Egy szimmetrikus trapéz párhuzamos oldalainak hossza  $a$  és  $b$ , egyik szára felezőpontjának a másik szára való merőleges vetülete ennek a szárnak egyik végpontjába esik. Számítsuk ki a trapéz területét!

5. Tegyük fel, hogy  $a$ ,  $b$  és  $c$  1-nél nagyobb és 100-nál kisebb egész számok,  $e$  és  $f$  pedig olyan 100-nál nagyobb egészek, melyekre teljesül  $e + f = a + b + c$ . Mutassuk meg, hogy  $ef < abc$ .

6. Egy egyenlő oldalú konvex ötszögben három átló hossza azonos. Bizonyítsuk be, hogy az ötszög szabályos!

7. Oldjuk meg a természetes számok halmazán a

$$7[\sqrt{x}] + 1 = x$$

egyenletet ( $[a]$  jelöli az  $a$ -nál nem nagyobb egész számok közül a legnagyobbat)!

8. Adott 20 különböző pozitív egész szám, mindegyik kisebb 70-nél. Mutassuk meg, hogy páronkénti különbségeik közt van négy egyenlő!

## II. forduló

*Az általános tantervű osztályok feladatai*

1. Bizonyítsuk be, hogy minden  $x \geq \frac{1}{2}$  valós számra

$$\sqrt{9x+7} < \sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} < \sqrt{9x+9}.$$

2. A sík egy véges  $H$  ponthalmazának az a tulajdonsága, hogy bármely  $P, R \in H$  pontpárhoz van egy  $Q \in H$  pont, amelyre  $PQR \triangleleft$  hegyesszög. Bizonyítsuk be, hogy  $H$  valamely ponthármasa hegyesszögű háromszöget határoz meg!

3. Negyven gyufaszálát szétosztottunk húsz skatulyába, mindegyikben van gyufaszál, egyikben sincs huszonegy darab. Bizonyítsuk be, hogy kiválasztható néhány skatulya, amelyekben összesen húsz gyufaszál van!

*A szakközépiskolások feladatai*

1. Adott az  $ABC$  háromszög síkjában a háromszög oldalegyenesekre nem illeszkedő  $O$  pont. Húzzunk az  $O$  ponton át a háromszög oldalaival párhuzamos egyeneseket, ezek a háromszög másik két oldalegyenesét egy-egy pontban metszik. Az  $O$  pont és az egy-egy oldalegyenesen fekvő 2 metszéspont három háromszöget határoz meg. Fejezzük ki az  $ABC$  háromszög területét ezeknek a háromszögeknek a területével!

2. Bizonyítsuk be, hogy minden  $x \geq \frac{1}{2}$  valós számra

$$\sqrt{9x+7} < \sqrt{x} + \sqrt{x+1} + \sqrt{x+2} < \sqrt{9x+9}.$$

3. Egy 4 egység élhosszúságú kockát akarunk szétvágni 64 darab 1 élhosszúságú kis kockára. Ezt megtehetjük egyszerűen 9 vágással, ha a szétvágással keletkező darabokat nem mozdítjuk el egymástól. Hány vágásra csökkenthető ez le, ha az egyes vágások után a kapott darabokat alkalmas módon átrendezhetjük?

*A speciális matematika tantervű osztályok feladatai*

1. Határozzuk meg a  $\underbrace{33 \dots 3}_{1984 \text{ db}} \cdot \underbrace{66 \dots 6}_{1984 \text{ db}}$  szorzat számjegyeinek összegét!

2. Legyen  $P_1, P_2, \dots, P_5$  a sík öt pontja. Bizonyítsuk be, hogy a fellépő leg-hosszabb és legrövidebb távolság hányadosa legalább  $2 \sin 54^\circ$ !

3. Tavaly a teniszezők átlagosan tizennyolc különböző ellenféllel játszottak. Kiválasztható-e néhány versenyző úgy, hogy ha csak ezek egymás elleni mérkőzéseit tekintjük, akkor mindenki legalább tíz másikkal játszott?