

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2016/2017-es tanév

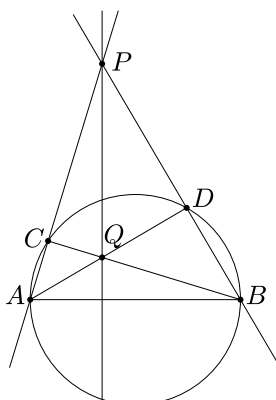
Kezdők I–II. kategória II. forduló

Kezdők III. kategória I. forduló

Megoldások és javítási útmutató

1. Egy kört az AB átmérője két ívre osztja. Ezek közül az egyiket kijelöljük a C és D pontokat. Legyen az AC és BD egyenesek metszéspontja P , az AD és BC egyeneseké pedig Q . Mekkora szöget zár be a PQ egyenes az AB átmérővel? (6 pont)

Megoldás. a) Készítsünk ábrát!



1 pont

A Thalész-tétel miatt az $\angle ACB$ és az $\angle ADB$ derékszög.

2 pont

Ennek következtében az APB háromszögben AD és BC magasságvonalak.

1 pont

Így metszéspontjuk Q az APB háromszög magasságpontja.

1 pont

PQ a háromszög harmadik magasságvonala, azaz a PQ egyenes merőleges AB -re.

1 pont

Összesen: 6 pont

Megjegyzés: Ha a versenyző *indoklás nélkül* (csak az ábra alapján) állapítja meg a merőlegességet, 2 pontot kaphat.

2. Legyen S a $H = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ halmaz olyan legalább kételemű részhalmaza, amelyre teljesül, hogy bármely két különböző elemének összegét képezve, csupa különböző számokat kapunk. Mennyi lehet az S elemei számának maximuma? (8 pont)

Megoldás. Az $S = \{1; 2; 3; 5; 8\}$ ötelemű halmaz elemeiből képzett kéttagú összegek páronként különböző értékűek ($1 + 2 = 3$, $1 + 3 = 4$, $1 + 5 = 6$, $1 + 8 = 9$, $2 + 3 = 5$, $2 + 5 = 7$, $2 + 8 = 10$, $3 + 5 = 8$, $3 + 8 = 11$, $5 + 8 = 13$). 3 pont

Tegyük fel, hogy létezik a feltételeknek megfelelő tulajdonságú hatelemű S halmaz is. Ekkor S elemeiből $\frac{6 \cdot 5}{2} = 15$ -féle kéttagú összeg képezhető. 1 pont

A H elemeiből képezhető kéttagú összegek értéke 3-tól 17-ig terjed, azaz 15-féle lehet. 1 pont

Így ha a 6-elemű S halmaznál azt szeretnénk elérni, hogy minden páronkénti összeg értéke különböző legyen, akkor az eredmények között minden 3-tól 17-ig terjedő számnak elő kell fordulnia. 1 pont

Viszont a 3 és a 17 csak egyféleképpen adódhat összegként, mégpedig az $1 + 2 = 3$ és $8 + 9 = 17$ formában. Ez azt jelenti, hogy ekkor az 1, 2, 8, 9 számoknak mindenképpen elő kell fordulniuk az S halmaz elemei között. 1 pont

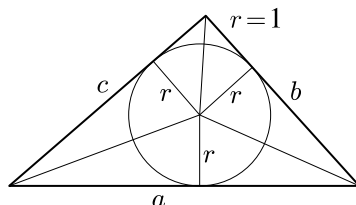
Ez viszont az $1 + 9 = 2 + 8$ egyenlőség alapján nem lehetséges.

A kapott ellentmondásból következik, hogy az S halmaz maximális elemszáma 5. 1 pont

Összesen: 8 pont

3. Igazoljuk, hogy egy egység sugarú kört tartalmazó háromszögnek egyik magassága legalább 3 egység hosszúságú. (8 pont)

1. megoldás. Használjuk az alábbi ábra jelöléseit! A bizonyítást elég elvégezni arra az esetre, amikor a kör érinti a háromszög oldalait, mivel az egyéb esetekben létezik olyan, az eredetihez hasonló háromszög, amelynek oldalai párhuzamosak az eredeti háromszög oldalaiival, érintik a megadott kört, és magasságai legalább akkorák, mint az eredeti háromszögé. 1 pont



A háromszög területe az egyes háromszögek területének összege, azaz

$$T = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2}. \quad 1 \text{ pont}$$

Másrészt:

$$T = \frac{am_a}{2} = \frac{bm_b}{2} = \frac{cm_c}{2}, \quad 1 \text{ pont}$$

ahonnan

$$a = \frac{2T}{m_a}, \quad b = \frac{2T}{m_b}, \quad c = \frac{2T}{m_c}. \quad 2 \text{ pont}$$

Ezeket behelyettesítve a fenti kifejezésbe, és elvégezve az egyszerűsítéseket kapjuk, hogy

$$1 = \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c}. \quad 1 \text{ pont}$$

Jelölje a háromszög leghosszabb magasságát m , ekkor

$$1 = \frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \geq \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \frac{1}{m} = \frac{3}{m}.$$

Ebből adódik a feladat állítása. 2 pont

Összesen: 8 pont

2. megoldás. Annak tárgyalása, hogy ha a beírt kört a háromszög oldalai nem érintik (ld. korábban). 1 pont

Tegyük fel, hogy a háromszög (egyik) legrövidebb oldala a (ebben az esetben hozzá tartozik a leghosszabb magasság). Ekkor 1 pont

$$T = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \frac{am_a}{2}. \quad 2 \text{ pont}$$

Becsüljük meg alulról a területet, és használjuk fel, hogy a kör egység sugarú.

$$\frac{am_a}{2} = \frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} \geq \frac{3ar}{2} = \frac{3a}{2}.$$

Ebből $m_a \geq 3$ adódik, tehát a feladat állítása teljesül. 4 pont

Összesen: 8 pont

4. Bizonyítsuk be, hogy ha az x és y valós számok összege 2, akkor

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1) \geq 4. \quad (8 \text{ pont})$$

1. megoldás. Az egyenlőtlenség bal oldalán elvégezve a beszorzást:

$$x^2y^2 + x^2 + y^2 + 1 \geq 4. \quad 1 \text{ pont}$$

A középső két tag helyett egy összeg négyzetét kialakítva:

$$x^2y^2 + (x + y)^2 - 2xy + 1 \geq 4. \quad 2 \text{ pont}$$

Majd teljes négyzetté alakítva:

$$(xy - 1)^2 + (x + y)^2 \geq 4. \quad 2 \text{ pont}$$

Mivel $(x + y)^2 = 4$ és $(xy - 1)^2 \geq 0$, ezért a feladatban szereplő egyenlőtlenség teljesül. 2 pont

Az egyenlőség feltétele: $x + y = 2$, $xy = 1$, azaz $x = y = 1$. 1 pont

Összesen: 8 pont

2. megoldás. A megadott feltételt felhasználva: $y = 2 - x$. 1 pont

A helyettesítést elvégezve:

$$(x^2 + 1)[(2 - x)^2 + 1] \geq 4. \quad 1 \text{ pont}$$

A műveleteket végrehajtva:

$$(x^2 + 1)(5 - 4x + x^2) \geq 4, \quad 1 \text{ pont}$$

$$x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 4x + 1 \geq 0. \quad 1 \text{ pont}$$

Vegyük észre, hogy az egyenlőtlenség baloldalán egy teljes negyedik hatvány áll, ezért

$$(x - 1)^4 \geq 0.$$

Mivel egy negyedik hatvány értéke biztosan nemnegatív szám, ezért az egyenlőtlenség teljesül. 3 pont

Az egyenlőség feltétele: $x = y = 1$. 1 pont

Összesen: 8 pont

3. megoldás. Alkalmazzuk az $x = 1 + a$ és $y = 1 - a$ helyettesítéseket. Ekkor 1 pont

$$[(1 + a)^2 + 1][(1 - a)^2 + 1] \geq 4. \quad 1 \text{ pont}$$

A négyzetre emeléseket és az összevonásokat elvégezve:

$$(a^2 + 2 + 2a)(a^2 + 2 - 2a) \geq 4. \quad 2 \text{ pont}$$

A baloldalon az ismert nevezetes azonosság segítségével elvégezve a beszorzást:

$$(a^2 + 2)^2 - (2a)^2 \geq 4. \quad 1 \text{ pont}$$

Ebből a rendezés után $a^4 \geq 0$ adódik. 1 pont

Mivel egy negyedik hatvány értéke csak nemnegatív szám lehet, ezért az egyenlőtlenség tetszőleges a valós számra, és x , y -ra teljesül. 1 pont

Az egyenlőség feltétele: $a = 0$, azaz $x = y = 1$. 1 pont

Összesen: 8 pont

5. Egy szórakozott professzornak 2000–2000 db 20 és 50 Ft-osa van. Tartozik valakinek, de elfelejtette, hogy pontosan mennyivel. Csak arra emlékszik, hogy az összeg 50-re végződik, és a nála lévő pénzérmekekkel húszféleképpen tudja kifizetni.

Mekkora a professzor adóssága?

(10 pont)

Megoldás. A kifizetendő összegben az 50 Ft-osok száma biztosan páros, mert ha páratlan számú 50-essel törlesztenénk, akkor azok összege 50-re végződne, és a fennmaradó részt 20 Ft-osokkal nem lehetne kifizetni, mivel az 50-re végződő számok nem oszthatók 20-szal.

Ugyanígy belátható, hogy a felhasznált 20 Ft-osok száma 5-tel osztható.

2 pont

A vizsgálatot több részre lehet osztani aszerint, hogy a rendelkezésre álló érmék száma (2000–2000 db.) korlátozza-e a lehetőségek számát vagy sem.

1. eset: A tartozás összege legfeljebb $2000 \cdot 20 \text{ Ft} = 40\,000 \text{ Ft}$.

Ekkor, ha a tartozás összege $k \cdot 100 \text{ Ft}$ ($k \in \mathbb{N}^+$), akkor a felhasznált 50 Ft-osok száma bármely 0-tól $2k$ -ig terjedő páros szám lehet (hiszen van elég érmék).

1 pont

Ez $k + 1$ lehetőség, vagyis $k = 19$ esetén van 20 lehetőségünk kifizetni a tartozást csak 20 és 50 Ft-osokkal.

1 pont

Tehát a tartozás összege lehet 1900 Ft.

1 pont

2. eset: A tartozás összege nagyobb, mint 40 000, de legfeljebb 100 000 Ft.

Ekkor már nem lehet csak 20 Ft-osokkal kifizetni a teljes összeget, de 50 Ft-osokat is felhasználva, igen. Ebben az esetben a lehetőségek száma a felhasznált 20 Ft-osok lehetséges számával, azaz a 0-tól 2000-ig terjedő 5-tel osztható számok darabszámával egyenlő, ami 401. Tehát a kifizetésre ekkor 19-nél több lehetőség adódik.

1 pont

3. eset: A tartozás összege nagyobb, mint 100 000 Ft. Ez csak 50 Ft-osokkal nem fizethető ki.

Vizsgáljuk meg, hogy ekkor hányféle érmekombináció maradhat a professzornál. Ez egyértelműen meghatározza, hogy hányféle kombinációban történhet a törlesztés. Mivel ekkor a professzornál kevesebb, mint 40 000 Ft marad, ezért az 1. részben leírtak értelmében ez az összeg csak 1900 Ft lehet ahhoz, hogy 20-féleképpen állhasson elő 20 és 50 Ft-osok összegeként.

3 pont

Tehát a tartozás összege $150\,000 - 1900 = 138\,100 \text{ Ft}$ is lehet.

1 pont

Összesen: 10 pont