Bolyai János
Matematikai Társulat

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2016/2017-es tanév
I. forduló
Kezdők I–II. kategória

Megoldások és javítási útmutató

1. Melyik 15-nek az a legkisebb pozitív többszöröse, amelynek tízes számrendszerbeli alakja csak a 0 és a 7 számjegyeket tartalmazza?

Megoldás. Mivel $15 = 3 \cdot 5$, továbbá a 3 illetve az 5 legnagyobb közös osztója 1, ezért a keresett szám osztható 3-mal és 5-tel is. 1 pont

Egy egész szám pontosan akkor osztható 5-tel, ha 0-ra vagy 5-re végződik, tehát a keresett szám utolsó számjegye a 0. 2 pont

Mivel pozitív többszöröst keresünk, és a 3-mal való oszthatóság egyenértékű a számjegyek összegének 3-mal való oszthatóságával, ezért a 7-es jegyek számának 3-mal osztható pozitív egésznek kell lennie, így a keresett számban legalább három darab 7-es számjegy szerepel. 2 pont

Ezek alapján a keresett szám a 7770. 1 pont

2. Hányféleképpen olvasható ki Arany Dániel neve az alábbi ábrából, ha az olvasás során csak jobbra és lefelé haladhatunk?

A	R	A	N					
R	A	N	Y					
A	N	Y	D	Á	N	I	E	L
			Á	N	I	E	L	
			N	I	E	L		
			I	E	L			
			E	L				
			L					

Megoldás. Az olvasás során mindenképpen át kell haladnunk az egyetlen D betűn. 1 pont

A D betűig 10 különböző út vezet (ez megállapítható leszámlálással vagy a kombinációk számának megállapításával). 2 pont

Innen minden továbbhaladásnál szabadon dönthetünk, hogy jobbra vagy lefelé lépünk-e.

Mivel ezután még 5 lépést kell megtennünk, ezért a keresztnév kiolvasási lehetőségeinek száma: $2^5 = 32$. 2 pont

Így az összes esetek száma $10 \cdot 2^5 = 320$. 1 pont

3. Egy osztályba 15 gyerek jár, és az osztálynak 4 társasjátéka van. Minden gyerek legalább 1 játékkal szeret játszani. Bizonyítsuk be, hogy az alábbi állítások között biztosan van igaz!

A. Legalább 3 olyan gyerek van, aki pontosan 4 játékkal szeret játszani.

B. Legalább 4 olyan gyerek van, aki pontosan 3 játékkal szeret játszani.

C. Legalább 5 olyan gyerek van, aki pontosan 2 játékkal szeret játszani.

D. Legalább 6 olyan gyerek van, aki pontosan 1 játékkal szeret játszani.

Megoldás. Tegyük fel indirekt, hogy egyik állítás sem igaz. 1 pont

Vagyis

- legfeljebb 2 olyan gyerek van, aki pontosan 4 játékkal szeret játszani,
- legfeljebb 3 olyan gyerek van, aki pontosan 3 játékkal szeret játszani,
- legfeljebb 4 olyan gyerek van, aki pontosan 2 játékkal szeret játszani,
- legfeljebb 5 olyan gyerek van, aki pontosan 1 játékkal szeret játszani. 1 pont

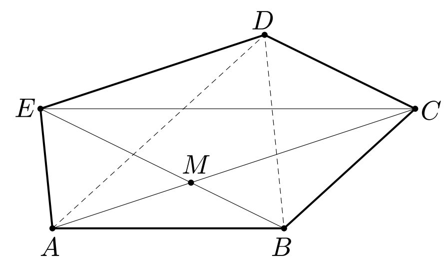
Mivel minden gyerek legalább 1 játékkal szeret játszani, ezért az összes gyereket csoportokba oszthatjuk aszerint, hogy pontosan 1, 2, 3, vagy 4 játékkal szeretnek játszani. 1 pont

Feltevésünk alapján ekkor legfeljebb $5 + 4 + 3 + 2 = 14$ gyerek lehet az osztályban. 1 pont

Mivel $14 < 15$, ezért ellentmondáshoz jutottunk. 1 pont

Tehát hamis volt az indirekt feltevésünk, vagyis az állítások között biztosan van igaz. 1 pont

4. Az ábrán látható $ABCDE$ konvex ötszög minden átlója párhuzamos azzal az oldallal, amelyikkel nincs közös végpontja. Legyen az AC és a BE átlók metszéspontja M. Bizonyítsd be, hogy az ABC háromszög területe egyenlő az EMC háromszög területével!



Megoldás. Mivel AD párhuzamos BC-vel, ezért az ABC, illetve BCD háromszögek BC oldalhoz tartozó magasságai egyenlő hosszúak, tehát a területük egyenlő. 2 pont

Ugyanígy a BCD és az ECD háromszögekben is egyenlő a CD oldalhoz tartozó magasság hossza, (mivel EB párhuzamos DC-vel) tehát ezeknek a háromszögeknek is egyenlő a területe. Így korábbi megállapításaink alapján az ABC és az EDC háromszögek területe is egyenlő. 1 pont

Az $EMCD$ négyszög paralelogramma. 1 pont

Az $EMCD$ paralelogrammát átlói két-két egybevágó háromszögre osztják, tehát az EMC háromszög egybevágó (és így egyenlő területű) az EDC háromszöggel. 1 pont

Ezzel beláttuk, hogy az ABC és az EMC háromszögek területe egyenlő. 1 pont

A szabályos ötszög esetének helyes vizsgálata önmagában 1 pontot ér.